



<p>COURS DE MATHEMATIQUES Fichier .pdf du cours en vidéo du même nom</p>

Les nombres complexes

Généralités

Ce cours porte exclusivement sur les généralités relatives aux nombres complexes.

1 L'idée générale

Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens où ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.



2 La théorie

2.1 La définition d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que : $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On appelle :

- a la partie réelle de z , notée $Re(z)$;
- b la partie imaginaire de z , notée $Im(z)$;
- i le nombre complexe défini par $i^2 = -1$;
- $a + ib$ la forme algébrique de z ;
- \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Déterminer un nombre complexe consiste à connaître sa partie réelle et sa partie imaginaire.

2.2 L'égalité de deux nombres complexes

Soient z et z' deux nombres complexes.

z et z' sont égaux lorsqu'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

2.3 L'imaginaire pur

Un nombre complexe non nul dont la partie réelle est nulle est appelé imaginaire pur.

2.4 Le nombre complexe nul

Un nombre complexe est nul lorsque sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.



3 Exercices pratiques

3.1 Exercice 1

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

0
 i
 $2\sqrt{2}$
 $-3i$
 $4 + i$
 $3 + 8i$

.

$Re(0) = 0$	et	$Im(0) = 0$
$Re(i) = 0$	et	$Im(i) = 1$
$Re(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$	et	$Im(2\sqrt{2}) = 0$
$Re(-3i) = 0$	et	$Im(-3i) = -3$
$Re(4 + i) = 4$	et	$Im(4 + i) = 1$
$Re(3 + 8i) = 3$	et	$Im(3 + 8i) = 8$



3.2 Exercice 2

Soient $z = 2a + ib$ et $z' = b + 2i$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Déterminer les réels a et b pour que les nombres complexes z et z' soient égaux.

Dire que deux nombres complexes sont égaux consiste à dire qu'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Il s'agit par conséquent de résoudre un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2a &= b \\ b &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 2 \end{cases}$$

Les nombres complexes z et z' s'écrivent donc $z = z' = 2 + 2i$.



3.3 Exercice 3

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$, $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a' et b' des réels.
La méthode consiste ici à calculer le nombre complexe $\xi = z + z'$, pour ensuite en extraire d'une part sa partie réelle, et d'autre part sa partie imaginaire.

$$\begin{aligned}\xi &= z + z' \\ \xi &= a + ib + a' + ib' \\ \xi &= a + a' + i(b + b')\end{aligned}$$

Or, $a = Re(z)$, $b = Im(z)$, $a' = Re(z')$ et $b' = Im(z')$.

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}Re(\xi) &= Re(z + z') = a + a' = Re(z) + Re(z') \\ &\text{et} \\ Im(\xi) &= Im(z + z') = b + b' = Im(z) + Im(z')\end{aligned}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$, $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$.



3.4 Exercice 4

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$, $Re(z \times z') = Re(z) \times Re(z') - Im(z) \times Im(z')$ et $Im(z \times z') = Re(z) \times Im(z') + Im(z) \times Re(z')$.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a' et b' des réels.
La méthode consiste ici à calculer le nombre complexe $\xi = z \times z'$, pour ensuite en extraire d'une part sa partie réelle, et d'autre part sa partie imaginaire.

$$\begin{aligned}\xi &= z \times z' \\ \xi &= (a + ib) \times (a' + ib') \\ \xi &= aa' + iab' + iba' + i^2bb' \\ \xi &= aa' + iab' + iba' - bb' \\ \xi &= aa' - bb' + i(ab' + ba')\end{aligned}$$

Or, $a = Re(z)$, $b = Im(z)$, $a' = Re(z')$ et $b' = Im(z')$.

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}Re(\xi) &= Re(z \times z') = aa' - bb' = Re(z) \times Re(z') - Im(z) \times Im(z') \\ &\text{et} \\ Im(\xi) &= Im(z \times z') = ab' + ba' = Re(z) \times Im(z') + Im(z) \times Re(z')\end{aligned}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$, $Im(z \times z') = Re(z) \times Im(z') + Im(z) \times Re(z')$.