

# العلماء في فلك الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي



الجزء

حقلياً  
ش  
البكالوريا

دار الشريعة

إعداد: أ. حمزة

# العلماء في فلك الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

جميع الشعب العلمية

حوليات البكالوريا

دار الشريعة



تأليف: أ. حمزة

# مُختاراتُ من بكالوريا جـ سـ لـ ر

تطابق تماما البرنامج الجديد لوزارة التربية



## ( دورة جوان 2008 )

### شعبة الرياضيات

#### الموضوع الأول

##### التمرين الأول : ( 5 نقط )

الستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحقتيهما  $\sqrt{3}-i$  و  $\sqrt{3}+3i$  على الترتيب.

(1) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $O$  و يحول  $A$  الى  $B$ ، ثم عين زاويته و نسبته.

(2) نعرف متتالية النقط من الستوي المركب كما ياتي  $A_0 = A$  و من اجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $A_{n+1} = S(A_n)$  نرسم الى لاحقة  $A_n$  بالرمز  $z_n$ .

(ا) انشئ في الستوي المركب النقط  $A_0$  و  $A_1$  و  $A_2$

(ب) برهن ان  $z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)}$

(ج) عين مجموعة الأعداد الطبيعية  $n$  التي تنتمي من أجلها النقط  $A_n$  الى المستقيم  $(OA_1)$

(3) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي  $u_0 = A_0 A_1$  و  $u_n = A_n A_{n+1}$  من اجل كل عدد طبيعي  $n$

(ا) بين ان المتتالية  $(u_n)$  هندسية يطلب تحديد حدتها الأول  $u_0$  و أساسها  $q$ .

(ب) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) احسب، بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، ثم احسب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

✓ الحل :

(1) كتابة المركبة للتشابه  $S$  الذي مركزه  $O$  و يحول  $A$  الى  $B$  تكون من الشكل  $z' = az$

حيث  $a$  عدد مركب غير معدوم و ليس حقيقي و  $|a| \neq 1$

بما انه يحول  $A$  الى  $B$  فإن  $z_B = az_A$  و منه

$$a = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}$$

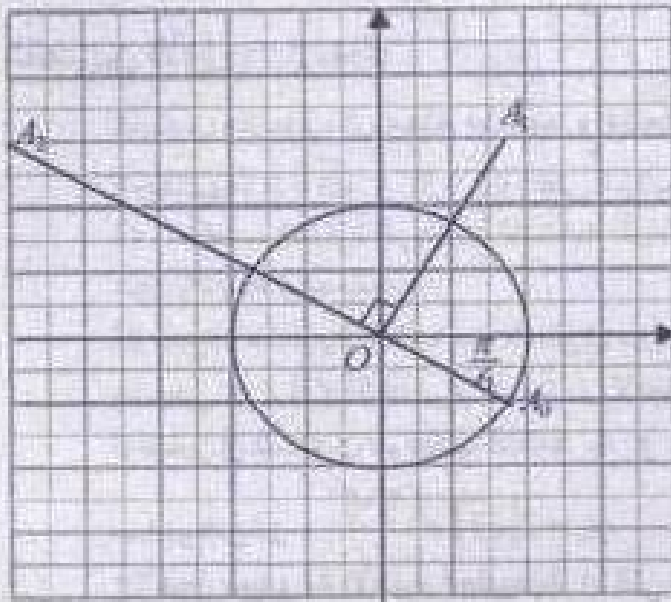
$$= \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} \times \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(3-3) + (\sqrt{3}+3\sqrt{3})i}{3+1}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

إذن العبارة المركبة لهذا التشابه هي  $z' = \sqrt{3}iz$   
و زاويته هي  $\arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2}$  ونسبته  $|\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$

$$A_{n+1} = S(A_n) \text{ و } A_0 = A \quad (2)$$

$$\begin{cases} |z_0| = 2 \\ \arg(z_0) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (1) \text{ مع أن } k \text{ عدد صحيح}$$



إذن  $A_0$  تقع على دائرة مركزها  
النقطة  $O$  و طول نصف قطرها 2

لدينا  $z_1 = \sqrt{3}iz_0$  و منه  $A_1$   
هي صورة  $A_0$  بالتشابه المباشر  
السابق،  $(\vec{OA}_0, \vec{OA}_1) = \frac{\pi}{2}$  و منه

$$OA_1 = \sqrt{3}OA_0$$

لدينا  $z_2 = \sqrt{3}iz_1$  و منه  $A_2$   
هي صورة  $A_1$  بالتشابه السابق

$$\text{و } (\vec{OA}_1, \vec{OA}_2) = \frac{\pi}{2} \text{ و } OA_2 = \sqrt{3}OA_1$$

لاحظ أن النقط  $A_0, O, A_2$  تقع على استقامة واحدة

$$z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{6})}$$

نبرهن على هذه المساواة بالتراجع على  $n$

$$\text{من أجل } n=0 \text{ لدينا } z_0 = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

$$\text{إذن } z_0 = 2(\sqrt{3})^0 e^{i(\frac{0\pi}{3} - \frac{\pi}{6})}$$

و بالتالي الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي  $n$  أي  $z_n = 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{6})}$

و نرهن ان الخاصية صحيحة من اجل  $n+1$  اي  $z_{n+1} = 2(\sqrt{3})^{n+1} e^{i(\frac{n+1}{2}\pi - \frac{\pi}{6})}$  لدينا  $A_{n+1} = S(A_n)$  هذا يعني

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \sqrt{3}i \times 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} \\ &= \left[ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \right] \times 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} \\ &= 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i\frac{\pi}{2} + i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} \\ &= 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} \\ &= 2(\sqrt{3})^{n+1} \times e^{i(\frac{n+1}{2}\pi - \frac{\pi}{6})} \end{aligned}$$

اذن الخاصية صحيحة من اجل  $n+1$  و بالتالي من اجل كل عدد طبيعي  $n$  الخاصية صحيحة.

ج)  $A_n$  تنتمي الى  $(OA_1)$  يعني انه يوجد عدد حقيقي  $\lambda$  بحيث  $\vec{OA}_n = \lambda \vec{OA}_1$  اي  $z_n = \lambda z_1$

$$\begin{aligned} z_n &= 2(\sqrt{3})^n e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6})} \\ &= (2\sqrt{3})(\sqrt{3})^{n-1} e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{3}} \\ &= (2\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \times (\sqrt{3})^{n-1} e^{i(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} \\ &= z_1 \times (\sqrt{3})^{n-1} e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

حتى يكون  $(\sqrt{3})^{n-1} e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}$  حقيقي يجب ان يكون  $(n-1)\frac{\pi}{2} = k\pi$  مع  $k \in \mathbb{N}$

اذن  $\frac{n-1}{2} = k$  و بالتالي  $n-1 = 2k$

اذن  $n = 2k+1$  مع  $k \in \mathbb{N}$

و عليه فالاعداد الطبيعية المطلوبة هي الاعداد الفردية

$$u_n = A_n A_{n+1} \text{ و } u_0 = A_0 A_1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A_{n+1} A_{n+2} \\ &= |z_{n+2} - z_{n+1}| \\ &= |\sqrt{3}iz_{n+1} - \sqrt{3}iz_n| \\ &= |\sqrt{3}i||z_{n+1} - z_n| \\ &= \sqrt{3} A_n A_{n+1} \\ &= \sqrt{3} u_n \end{aligned}$$



$$u_0 = A_0 A_1 = |z_1 - z_0|$$

$$= |\sqrt{3} |z_0 - z_0|$$

$$= |\sqrt{3} i - 1| |z_0|$$

$$= \sqrt{3+1} \times 2 = 4$$

(ب) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $u_n = u_0 \times q^n$  ، إذن  $u_n = 4 \times (\sqrt{3})^n$

(ج)  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= 4 \times \frac{1-(\sqrt{3})^{n+1}}{1-(\sqrt{3})}$$

بما أن  $(\sqrt{3})^{n+1} \rightarrow +\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^{n+1} = +\infty$  ومنه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (\sqrt{3})^{n+1} = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

لأن  $1 - \sqrt{3} < 0$

### التمرين الثاني ، (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لتكن النقاط  $A(0, 2, 1)$  و  $B(-1, 1, -3)$  و  $C(1, 0, -1)$

(1) اكتب العبارة الديكارتية لسطح الكرة  $S$  التي مركزها  $C$  وتشمل النقطة  $A$

(2) ليكن المستقيم  $(D)$  يعرف بالتمثيل الوسيطى ،

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \text{ حيث } \lambda \text{ عدد حقيقي.}$$

(أ) اكتب معادلة للمستوي  $(P)$  الذي يشمل النقطة  $C$  ويعامد للمستقيم  $(D)$

(ب) احسب المسافة بين النقطة  $C$  والمستقيم  $(D)$

(ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم  $(D)$  و سطح الكرة  $S$  ؟

✓ الحل :

(1) كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة  $S$  ،

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من  $S$  إذن  $(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = R^2$

حيث  $R = CA$

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2} \\ &= \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2 + (1+1)^2} \\ &= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

إذن معادلة  $S$  هي  $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$  (2)

$$(D) : \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

(أ) بما أن المستوي  $(P)$  يعامد  $(D)$  فإن ناطم  $(P)$  هو شعاع توجهه  $(D)$  فإذا رمزنا إلى ناطم  $(P)$  بـ  $\vec{n}$  فيكون  $\vec{n}(-1, 2, 2)$

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من  $(P)$  إذن  $\vec{CM} \perp \vec{n}$  و عليه ،  $\vec{CM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\begin{aligned} \vec{CM} \cdot \vec{n} &= (x-1, y, z+1) \cdot (-1, 2, 2) \\ &= -x+1+2y+2z+2 \\ &= -x+2y+2z+3 \end{aligned}$$

إذن معادلة  $(P)$  هي ،  $-x+2y+2z+3=0$

(ب) المسافة بين النقطة  $C$  و  $(D)$  هي الطول  $CH$  حيث  $H$  هي نقطة تقاطع  $(D)$  مع  $(P)$  .  
نعيّن إحداثيات النقطة  $H$  .

نرمز بـ  $(x, y, z)$  إلى إحداثيات  $H$  إذن تحقق معادلة  $(D)$  و معادلة  $(P)$  أي :

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \\ -x + 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

نعوض  $x$  و  $y$  و  $z$  في معادلة  $(P)$  نجد :

$$1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 6 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\text{أي ، } 9\lambda + 4 = 0 \text{ ومنه } \lambda = -\frac{4}{9}$$

إذن

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{4}{9} = -\frac{5}{9} \\ y = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \\ z = -3 - 2 \times \frac{4}{9} = -\frac{35}{9} \end{cases}$$

و عليه  $H\left(-\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{35}{9}\right)$



$$\begin{aligned}
 CH &= \sqrt{\left(\frac{-5}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{9}-0\right)^2 + \left(\frac{-35}{9}+1\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{9} \sqrt{14^2 + 1^2 + 26^2} = \frac{1}{9} \sqrt{196 + 1 + 676} \\
 &= \frac{1}{9} \sqrt{873} = \sqrt{\frac{97}{9}}
 \end{aligned}$$

### التمرين الثالث : ( 5 نقاط )

- نعتبر للمعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين  $x$  و  $y$  حيث :  $3x - 21y = 78$
- (1) (أ) بين أن (E) تقبل حلولاً في  $\mathbb{Z}^2$   
 (ب) أثبت أنه إذا كانت الثنائية  $(x, y)$  من  $\mathbb{Z}^2$  حلاً للمعادلة (E) فإن  $x \equiv 5[7]$   
 استنتج حلول المعادلة (E)
- (2) (أ) أدرس ، حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $5^n$  على 7 .  
 (ب) عين الثنائيات  $(x, y)$  من  $\mathbb{N}^2$  التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق  $5^n + 5^y \equiv 3[7]$

### ✓ الحل :

(1) (أ) إثبات أن (E) تقبل حلولاً

بما أن  $PGCD(3, 21) = 3$  و 78 يقسم 3 فإن المعادلة  $3x - 21y = 78$  تقبل حلولاً في  $\mathbb{Z}^2$

(ب) نفرض أن الثنائية  $(x, y)$  حلاً للمعادلة (E)

$$3x - 21y = 78$$

$$\text{بما أن } 21y \equiv 0[7] \text{ فإن } 3x \equiv 78[7]$$

$$78 \equiv 1[7]$$

و عليه  $3x \equiv 1[7]$  و بالضرب في 5 نجد :

$$15x \equiv 5[7] \text{ وبما أن } 15x \equiv x[7] \text{ فإن الموافقة } 15x \equiv 5[7] \text{ تصبح } x \equiv 5[7]$$

(2) (أ) تعيين بواقي القسمة الاقليدية لـ  $5^n$  على 7

$$5^0 \equiv 1[7] , 5^1 \equiv 5[7] , 5^2 \equiv 4[7] , 5^3 \equiv 6[7] , 5^4 \equiv 2[7] , 5^5 \equiv 3[7] , 5^6 \equiv 1[7]$$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث

$$n = 6k + r \text{ حيث } 0 \leq r \leq 5$$

$$5^{6k} \equiv 1[7] \text{ و منه } 5^n \equiv 5^r[7]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^{6k} \equiv 1[7] \\ 5^r \equiv 3^r[7] \end{array} \right. \text{ و منه ينتج } 5^{6k+r} \equiv 5^r[7]$$

$$5^n \equiv 5^n [7]$$

هذا يعني أن باقي قسمة  $5^n$  على 7 هو نفسه باقي قسمة  $5^n$  على 7 من أجل كل عدد طبيعي  $n$

- من أجل  $n=6k$  ، باقي قسمة  $5^n$  على 7 هو 1
- من أجل  $n=6k+1$  ، باقي قسمة  $5^n$  على 7 هو 5
- من أجل  $n=6k+2$  ، باقي قسمة  $5^n$  على 7 هو 4
- من أجل  $n=6k+3$  ، باقي قسمة  $5^n$  على 7 هو 6
- من أجل  $n=6k+4$  ، باقي قسمة  $5^n$  على 7 هو 2
- من أجل  $n=6k+5$  ، باقي قسمة  $5^n$  على 7 هو 3

ب) نعين الثنائيات  $(x, y)$  من  $N^2$  بحيث  $5^x + 5^y \equiv 3 [7]$

$$x = 6k + r \quad \text{و} \quad y = 6k' + r'$$

$$0 \leq r \leq 5 \quad \text{و} \quad 0 \leq r' \leq 5$$

$$5^x + 5^y \equiv 5^r + 5^{r'} [7]$$

$r'$	$r$	0	1	2	3	4	5
0	$5^r + 5^{r'} \equiv 2 [7]$	6	5	0	3	4	1
1		5	4	3	2	1	0
2		4	3	2	1	0	6
3		3	2	1	0	6	5
4		2	1	0	6	5	4
5		1	0	6	5	4	3

اذن الثنائيات  $(r, r')$  بحيث  $5^r + 5^{r'} \equiv 3 [7]$  هي  $(0, 4)$  ،  $(1, 1)$  ،  $(2, 3)$  ،  $(3, 2)$  ،  $(4, 0)$  و عليه الثنائيات  $(x, y)$  هي :

$$(6k+3, 6k'+2) \quad , \quad (6k+4, 6k') \quad , \quad (6k+1, 6k'+1) \quad , \quad (6k+4, 6k') \\ (6k+2, 6k'+3) \quad , \quad (6k, 6k'+4) \quad \text{مع} \quad (k, k') \quad \text{تنتمي إلى} \quad N^2$$

#### التمرين الرابع: (6 نقاط)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1, +\infty[$  بالعلاقة :  $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

يرمز  $(C)$  إلى منحنى  $f$  في المستوى الزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(الوحدة على المحورين 2 cm)

1) احسب  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  وفسر النتيجة هندسيا.

أدرس تغيرات الدالة  $f$

باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي"، انشئ المنحنى  $(C)$ .

ارسم في نفس العلم المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$ .

(2) نعرف المتتالية  $(U_n)$  على المجموعة  $N$  كالآتي :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

(1) باستعمال  $(D)$  و  $(C)$ ، مثل الحدود  $U_0$ ،  $U_1$ ،  $U_2$  على محور الفواصل.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  و تقاربها.

(3) ابرهن بالراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $2 \leq U_n \leq 5$  و  $U_{n+1} > U_n$

(ب) استنتج أن  $(U_n)$  متقاربة. احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

✓ الحل :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \sqrt{x-1} \\ (1) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \sqrt{x-1} - 3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0^+ \text{ ، لأن}$$

إذن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق من اليمين عند 1

دراسة تغيرات الدالة  $f$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]1, +\infty[$  و لدينا ،

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

من أجل كل  $x \in ]1, +\infty[$  لدينا  $f'(x) > 0$

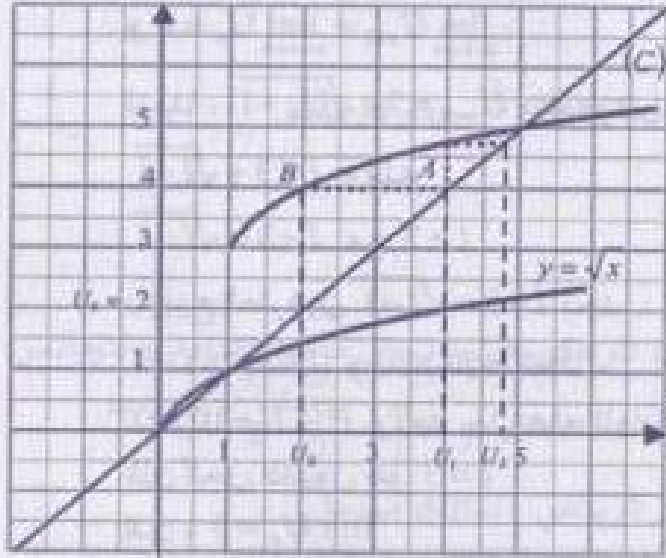
إذن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$$

$$f(1) = 3 \text{ ، لدينا}$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$ إشارة	$-$	$+$
$f(x)$ تغيرات	$3$	$+\infty$



جدول تغيرات الدالة  $f$  :

- رسم المنحنى  $(C)$

بوضع  $U(x) = \sqrt{x}$

يكون  $f(x) = 3 + U(x-1)$

إذن  $(C_f)$  هو صورة منحنى

الدالة  $U$  بواسطة انسحاب

شعاعه  $\vec{U}(1,3)$

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (2)$$

(أ) نرسم مستقيم معادلته  $x = U_0$

يقطع المنحنى  $(C)$  في نقطة  $B$

ترتيبها  $U_1$

من النقطة  $B$  نرسم مستقيم

معادلته  $y = U_1$  يقطع المستقيم  $(d)$

في  $A(U_1, U_1)$

نسقط  $A$  على محور القواصل نحصل على النقطة  $(U_1, 0)$

بنفس الكيفية نمثل  $U_2$

(ب) المتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماما ومتقاربة لأن  $U_0(5)$  و  $(\Delta)$  يقطع  $(C)$

(3) (أ) اثبات أن  $2 \leq U_n \leq 5$  و  $U_{n+1} > U_n$

- نثبت أولا ،  $2 \leq U_n \leq 5$

- من أجل  $n=0$  لدينا ،  $u_0 = 2$  و  $2 \leq 2 \leq 5$  إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي  $n$  أي  $2 \leq U_n \leq 5$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  أي  $2 \leq U_{n+1} \leq 5$

بما أن  $2 \leq U_n \leq 5$  و  $f$  متزايدة تماما على  $[1, +\infty[$  فإن  $f(2) \leq f(U_n) \leq f(5)$

ولدينا ،  $f(2) = 4$  و  $f(5) = 5$

إذن ،  $4 \leq f(U_n) \leq 5$  أي  $4 \leq U_{n+1} \leq 5$

بما أن  $[4, 5] \subset [2, 5]$  فإن  $2 \leq U_n \leq 5$

و عليه فالخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  الخاصية صحيحة

- نثبت صحة  $U_{n+1} > U_n$

- من أجل  $n=0$  لدينا ،  $u_0 = 2$  و  $u_1 = 4$  و  $4 > 2$  إذن الخاصية صحيحة من أجل

$n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي  $n$  أي  $U_{n+1} > U_n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  أي  $U_{n+2} > U_{n+1}$



لدينا ،  $U_n, U_{n+1}$  و  $f$  متزايدة تماما على  $[1, +\infty[$

إذن ،  $f(U_n) \leq f(U_{n+1})$  أي  $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

و عليه فالخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  الخاصية صحيحة

(ب) بما أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ 5 فهي متقاربة

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

لدينا ،  $U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n - 1}$  بالمرور إلى النهاية نجد ،

$$l = 3 + \sqrt{l - 1}$$

$$l - 3 = \sqrt{l - 1} \text{ مع } l \geq 3$$

بترتيب الطرفين  $l - 3 = \sqrt{l - 1}$  نجد ،

$$(l - 3)^2 = l - 1 \text{ و بالتبسيط نجد}$$

$$l^2 - 7l + 10 = 0 \text{ و بعد حل هذه المعادلة نجد } l = 2 \text{ و } l = 5 \text{ و بما أن } l \geq 3$$

فإن الحل المقبول هو  $l = 5$

$$\text{إذن ، } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 5$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول : (5 نقط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  كثير الحدود العرف كما يلي :

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

- (1) بين أنه إذا كان  $a$  جذر لكثير الحدود  $P(z)$  فإن  $\frac{1}{a}$  جذر له أيضا.
- (2) تحقق أن  $1+i$  جذر لكثير الحدود  $P(z)$ .
- (3) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(z) = 0$ .
- (4) اكتب الحلول على الشكل الأسّي.
- (5) لتكن  $A, B, C$  و  $D$  نقط من المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  والتي لاحقاتها على الترتيب :  $1+i, -1+i, \frac{-m}{2} - \frac{m}{2}i$  و  $\frac{m}{2} - \frac{m}{2}i$  حيث  $m$  عدد حقيقي . عين  $m$  حتى يكون الرباعي  $ABCD$  مربعا .

✓ الحل :

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

(1)  $a$  جذر لـ  $P(z)$  يعني  $P(a) = 0$

$$2a^4 - 2ia^3 - a^2 - 2ia + 2 = 0 \quad \text{أي}$$

$$P\left(\frac{1}{a}\right) = 2\left(\frac{1}{a}\right)^4 - 2i\left(\frac{1}{a}\right)^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2i\left(\frac{1}{a}\right) + 2 = 0$$

$$= \frac{2}{a^4} - \frac{2i}{a^3} - \frac{1}{a^2} - \frac{2i}{a} + 2$$

$$= \frac{1}{a^4} [2 - 2ia - a^2 - 2ia^3 + 2a^4]$$

$$= \frac{1}{a^4} \times P(a) = \frac{1}{a^4} \times 0 = 0$$

إذن  $\frac{1}{a}$  هو أيضا جذرا لـ  $P(z)$

$$(2) \quad P(1+i) = 2(1+i)^4 - 2i(1+i)^3 - (1+i)^2 - 2i(1+i) + 2$$

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4$$

$$= 1 + 4i - 6 - 4i + 1$$

$$= -4$$

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3$$

$$= 1 + 3i - 3 - i$$

$$= -2 + 2i$$

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1+2i+i^2 \\ &= 1+2i-1 \\ &= 2i\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}P(1+i) &= 2(-4) - 2i(-2+2i) - 2i - 2i + y \\ &= -8 + 4i + 4 - 4i + y \\ &= (8-8) + (4i-4i) = 0\end{aligned}$$

(3) حل في  $C$  المعادلة  $P(z)=0$

بما أن  $1+i$  حل لـ  $P(z)=0$  فإن  $\frac{1}{1+i}$  هو حلا أيضا لهذه المعادلة

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \times \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$P(z)$  يقبل القسمة على  $z^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$

$2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$	$z^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$
$2z^4 - (3+i)z^3 + 2z^2$	$2z^3 + (3-i)z + 2$
$(3-i)z^3 - 3z^2 - 2iz + 2$	
$(3-i)z^3 - 5z^2 + (3-i)z$	
$2z^2 + (-3-i)z + 2$	
$2z^2 - (3+i)z + 2$	
$0$	

$$P(z) = \left[ z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1 \right] \left[ 2z^2 + (3-i)z + 2 \right], \text{ لأن } P(z)=0 \text{ تعني,}$$

$$\begin{cases} 2z^2 + (3-i)z + 2 = 0 \\ z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1 = 0 \end{cases}$$

نحل المعادلة (\*).....  $2z^2 + (3-i)z + 2 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (3-i)^2 - 4(2)(2) \\ &= 9 - 6i - 1 - 16 = -8 - 16i\end{aligned}$$

ليكن  $\sigma = x + iy$  جذر تربيعي لـ  $\Delta$  إذن  $\sigma^2 = \Delta$  تكافئ

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \dots\dots\dots (1) \\ 2xy = -6 \dots\dots\dots (2) \\ x^2 + y^2 = 10 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد ،  $2x^2 = 2$  إذن

$$x^2 = 1 \text{ ومنه ، } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

- من أجل  $x = 1$  نجد  $y = -3$

- من أجل  $x = -1$  نجد  $y = 3$

$$\text{إذن ، } \sigma = -1 + 3i \text{ أو } \sigma = 1 - 3i$$

و عليه المعادلة (\*) لها حلان هما ،

$$z = \frac{-3 + i + 1 - 3i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z = \frac{-3 + i - 1 + 3i}{4} = -1 + i$$

إذن فالمعادلة  $P(z) = 0$  لها أربعة حلول هي  $1 + i$  ،  $-1 + i$  ،  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  ،  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

4) كتابة الحلول على الشكل الأسّي

- بالنسبة إلى  $1 + i$  ،

$$|1 + i| = \sqrt{2}$$

نضع  $\arg(1 + i) = \theta$  تحقق ،

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{ومنه } \theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{إذن } 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

- بالنسبة إلى  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  ،

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع  $\arg\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \theta$  تحقق ،

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{إذن ، } \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{إذن ، } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$



- بالنسبة إلى  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  :

$$\left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع  $\arg\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \theta$  تحقق :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ومن ثم  $\theta \equiv 5\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$\text{إذن: } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i5\frac{\pi}{4}}$$

- بالنسبة إلى  $-1+i$  :

$$|-1+i| = \sqrt{2}$$

نضع  $\arg(-1+i) = \theta$  تحقق :

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ومن ثم  $\theta \equiv 3\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$$\text{إذن: } -1+i = \sqrt{2} e^{i3\frac{\pi}{4}}$$

(5)  $ABCD$  مربع يعني  $AB = AD = BC = DC$  و  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$

$$AB = 2 \text{ و } AD = \sqrt{\frac{m^2}{2} + 2}$$

$$AB = AD \text{ يكافئ } \frac{m^2}{2} + 2 = 4 \text{ ومنه } \frac{m^2}{2} = 2$$

إذن  $m^2 = 4$  وبالتالي  $m = 2$  أو  $m = -2$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{AD} \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = 0 \text{ يكافئ } -2\left(\frac{m}{2} - 1\right) = 0 \text{ يكافئ } m = 2$$

إذن قيمة  $m$  المطلوبة هي 2

التمرين الثاني : (4 نقط)

(1) المتتالية العرفية بعدها الأول  $U_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$  .  
احسب  $U_1$  و  $U_2$  و  $U_3$  .

(2)  $(V_n)$  المتتالية العددية العرفية من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن  $(V_n)$  متتالية ثابتة .

- استنتج عبارة  $U_n$  بدلالة  $n$

- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(3)  $(W_n)$  المتتالية العددية العرفية من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- احسب المجموع  $S$  حيث :  $S = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$  .

✓ الحل :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1 \end{cases}$$

$$U_1 = \frac{2}{3}U_0 + 1 = \frac{2}{3} \times 2 + 1 = \frac{7}{3} \quad (1)$$

$$U_2 = \frac{2}{3}U_1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + 1 = \frac{23}{9}$$

$$U_3 = \frac{2}{3}U_2 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{23}{9} + 1 = \frac{73}{27}$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad (2)$$

- إثبات أن  $(V_n)$  ثابتة .

$(V_n)$  ثابتة تعني من أجل كل  $n$  :  $V_{n+1} - V_n = 0$

$$V_1 - V_0 = \left(U_1 + \frac{2}{3}\right) - \left(U_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0\right)$$

$$= \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right) - (2 + 1) \quad \text{من أجل } n=0$$

$$= \frac{9}{3} - 3 = 0$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي  $V_{n+1} - V_n = 0$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  أي  $V_{n+2} - V_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}
 V_{n+2} - V_{n+1} &= \left[ U_{n+2} + \left( \frac{2}{3} \right)^{n+2} \right] - \left[ U_{n+1} + \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] \\
 &= \left[ \frac{2}{3} U_{n+1} + \left( \frac{2}{3} \right)^{n+2} \right] - \left[ \frac{2}{3} U_{n+1} + \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] \\
 &= \frac{2}{3} \left[ U_{n+1} + \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right] - \frac{2}{3} \left[ U_{n+1} + \left( \frac{2}{3} \right)^n \right] \\
 &= \frac{2}{3} V_{n+1} - \frac{2}{3} V_n = \frac{2}{3} (V_{n+1} - V_n) \\
 &= \frac{2}{3} \times 0 = 0
 \end{aligned}$$

- استنتاج عبارة  $U_n$  بدلالة  $n$  ،  
 بما أن  $(V_n)$  ثابتة فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  
 $V_n = V_0 = 3$

$$U_n = V_n - \left( \frac{2}{3} \right)^n = V_0 - \left( \frac{2}{3} \right)^n = 3 - \left( \frac{2}{3} \right)^n$$

- حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0 \quad \text{فإن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$$

وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$

$$W_n = \frac{2}{3}n - \left( \frac{2}{3} \right)^n \quad (3)$$

-  $\frac{2}{3}n = L_n$  : حد عام لمتتالية حسابية أساسها  $\frac{2}{3}$  و حدها الأول 0

-  $\left( \frac{2}{3} \right)^n = K_n$  : حد عام لمتتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$  و حدها الأول 1

إذن يمكن وضع :  $W_n = L_n - K_n$

$$\begin{aligned}
 S &= (L_0 - K_0) + (L_1 - K_1) + \dots + (L_n - K_n) \\
 &= (L_0 + L_1 + \dots + L_n) - (K_0 + K_1 + \dots + K_n)
 \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{n+1}{2} \right) (L_0 + L_n) - K_0 \times \frac{1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= \left( \frac{n+1}{2} \right) \left( 0 + \frac{2}{3}n \right) - \frac{1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3} - 3 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right]$$

التمرين الثالث : (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى العلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  العرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} , (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} , (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{على الترتيب.}$$

- 1) بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  ليسا من نفس المستوى.
- 2) نقطة كيفية من  $(\Delta)$  و نقطة كيفية من  $(\Delta')$
- 3) عين إحداثيات النقطتين  $M$  و  $N$  بحيث يكون المستقيم  $(MN)$  عموديا على كل من  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$
- 4) احسب المسافة بين نقطة كيفية من  $(\Delta')$  و المستوي  $(P)$  . ماذا تلاحظ؟

✓ الحل :

$$(\Delta) : \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} \quad (\Delta') : \begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases}$$

1) شعاع توجيه  $(\Delta)$  هو  $\vec{v}\left(1, \frac{1}{2}, -2\right)$  و شعاع توجيه  $(\Delta')$  هو  $\vec{u}(1, -2, 1)$

و بالتالي  $\vec{v}$  و  $\vec{u}$  غير مرتبطين خطيا و عليه  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  غير متوازيان

إذن إما متقاطعان و بالتالي من نفس المستوى أو غير متقاطعان و بالتالي ليسا من نفس المستوى

وعليه نبحث عن نقط تقاطعهما إن وجدت

نفرض  $M$  نقطة من  $(\Delta) \cap (\Delta')$

إذن :

$$\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases}$$

$$6+\alpha=3+\lambda \dots\dots\dots (1)$$

$$(1) \dots\dots\dots \begin{cases} 1-2\alpha=2+\frac{1}{2}\lambda \dots\dots\dots (2) \\ 5+\alpha=-2-2\lambda \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad \text{و منه ينتج ،}$$

$$\begin{cases} 1-2\alpha=2+\frac{1}{2}\lambda \dots\dots\dots (2) \\ 5+\alpha=-2-2\lambda \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$



من (1) نجد  $\alpha = \lambda - 3$  ..... (4)

نعوض  $\alpha$  في (2) نجد ،  $1 - 2\lambda + 6 = 2 + \frac{1}{2}\lambda$

و منه نستنتج ،  $5 - \frac{5}{2}\lambda = 0$  إذن  $\lambda = 2$

نعوض  $\lambda$  في (4) نجد ،  $\alpha = 2 - 3 = -1$

إذن  $\alpha = -1$

بتعويض قيمة  $\alpha$  و  $\lambda$  في (3) نجد ،

$(2) \quad 5 - 1 = -2 - 2(2)$  أي  $4 = -6$  و هذا خطأ

إذن الثنائية  $(\alpha, \lambda) = (-1, 2)$  ليست حلا للجملة (I) و عليه فالستقيمان غير متقاطعان  
إذن فهما من مستويين مختلفين.

(1 (2

$$\vec{MN} \begin{pmatrix} \lambda - \alpha - 3 \\ \frac{1}{2}\lambda + 2\alpha + 1 \\ -2\lambda - \alpha - 7 \end{pmatrix} \text{ أي } \vec{MN} \begin{pmatrix} 3 + \lambda - 6 - \alpha \\ 2 + \frac{1}{2}\lambda - 1 + 2\alpha \\ -2 - 2\lambda - 5 - \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{MN} \perp \vec{v} \text{ يعني } \lambda - \alpha - 3 + \frac{1}{4}\lambda + \alpha + \frac{1}{2} + 4\lambda + 2\alpha + 14 = 0$$

بالتبسيط نجد ،

$$(I) \dots\dots\dots \frac{21}{4}\lambda + 2\alpha + \frac{23}{2} = 0$$

$$\vec{MN} \perp \vec{u} \text{ يعني } \lambda - \alpha - 3 - \lambda - 4\alpha - 2 - 2\lambda - \alpha - 7 = 0$$

بالتبسيط نجد ،

$$(II) \dots\dots\dots -2\lambda - 6\alpha - 12 = 0$$

إذن نحصلنا على الجملة

$$\begin{cases} 21\lambda + 8\alpha + 46 = 0 \dots\dots (I) \\ -2\lambda - 6\alpha - 12 = 0 \dots\dots (II) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (I) في 3 و المعادلة (II) في 4 نجد

$$\begin{cases} 63\lambda + 24\alpha + 138 = 0 \\ -8\lambda - 24\alpha - 48 = 0 \end{cases}$$

و بالجمع نجد

$$55\lambda + 90 = 0 \text{ و منه } \lambda = \frac{-90}{55} = \frac{-18}{11}$$

نعوض قيمة  $\lambda$  (I) نجد  $\alpha = \frac{-16}{11}$

$$\text{إذن } (\alpha, \lambda) = \left( -\frac{16}{11}, \frac{18}{11} \right)$$

و عليه احداثيات  $M$  هي :

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{18}{11} = \frac{15}{11} \\ y = 2 - \frac{9}{11} = \frac{13}{11} \\ z = -2 + \frac{36}{11} = \frac{14}{11} \end{cases}$$

اذن  $M\left(\frac{15}{11}, \frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right)$

- احداثيات  $N$  هي :

$$\begin{cases} x = 6 - \frac{16}{11} = \frac{50}{11} \\ y = 1 - 2\left(\frac{-16}{11}\right) = \frac{43}{11} \\ z = 5 + \left(\frac{-16}{11}\right) = \frac{39}{11} \end{cases}$$

اذن  $N\left(\frac{50}{11}, \frac{43}{11}, \frac{39}{11}\right)$

(ب)

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{\left(\frac{15}{11}\right)^2 + \left(\frac{13}{11}\right)^2 + \left(\frac{14}{11}\right)^2} \\ &= \frac{1}{11} \sqrt{35^2 + 30^2 + 25^2} \\ &= \frac{1}{11} \sqrt{1225 + 900 + 625} \\ &= \frac{1}{11} \sqrt{2750} \\ &= 5 \sqrt{\frac{110}{121}} = 5 \sqrt{\frac{10}{11}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad (P) : ax + by + cz + d = 0$$

$(P)$  يوازي  $(\Delta')$  يعني ناظم  $(P)$  عمودي على شعاع توجيه  $(\Delta')$

اي  $(a, b, c)(1, -2, 1) = 0$  و منه نستنتج :

$$a - 2b + c = 0 \dots\dots (1)$$

$(\Delta)$  محتوي في  $(P)$  يعني انه من اجل كل  $\lambda \in \mathbb{R}$

احداثيات نقطة من  $(\Delta)$  تحقق معادلة المستوي و عليه :

من اجل كل  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$a(3 + \lambda) + b\left(2 + \frac{1}{2}\lambda\right) + c(-2 - 2\lambda) + d = 0.$$

بالتبسيط نجد :

$$(3a+2b-2c+d) + \left(a + \frac{1}{2}b - 2c\right)\lambda = 0$$

ومن هنا نستنتج :

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b - 2c = 0 \\ 3a + 2b - 2c + d = 0 \end{cases}$$

إذن نحصل على الجملة

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2a + b - 4c = 0 \dots\dots\dots (2) \\ 3a + 2b - 2c + d = 0 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد  $a = 2b - c$

نعوض  $a$  في (2) نجد  $b = \frac{6}{5}c$  و منه  $a = \frac{7}{5}c$

نعوض  $a$  و  $b$  في (3) نجد  $d = -\frac{23}{5}c$

إذن معادلة المستوى المطلوبة هي  $\frac{7}{5}cx + \frac{6}{5}cy + cz - \frac{23}{5}c = 0$

و بالقسمة على  $\frac{c}{5}$  الغير معلوم نجد :  $7x + 6y + 5z - 23 = 0$  ، (P)

4) حساب المسافة بين نقطة كيفية من  $(\Delta')$  و المستوى (P)

لتكن  $K(x, y, z)$  نقطة كيفية من  $(\Delta')$

المسافة بين  $K$  و المستوى (P) هي

$$\begin{aligned} KH &= \frac{|7(6+x) + 6(1-2\alpha) + 5(5+\alpha) - 23|}{\sqrt{7^2 + 6^2 + 5^2}} \\ &= \frac{|7\alpha - 12\alpha + 5\alpha + 50|}{\sqrt{110}} \\ &= \frac{50}{\sqrt{110}} = \sqrt{\frac{2500}{110}} = \sqrt{\frac{250}{11}} = 5\sqrt{\frac{10}{11}} \end{aligned}$$

نلاحظ أن المسافة بين نقطة كيفية من  $(\Delta')$  و المستوى (P) هي الطول MN

### التمرين الرابع: ( 7 نقط )

1)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة  $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها

البياني في المستوى المنسوب إلى العلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- (1) ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
- (2) بين ان  $(C_r)$  يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  و اكتب معادلة لمماس  $C_r$  عند النقطة  $\omega$ .
- اثبت ان  $\omega$  مركز تناظر للمنحنى  $C_r$ .
- (3) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+3)]$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ .
- استنتج ان  $C_r$  يقبل مستقيمين متقاربين يطلب إعطاء معادلة كل منهما.
- (4) احسب  $f(1)$  و  $f(-1)$  (تدور النتائج الى  $10^{-2}$ ) ثم ارسم  $C_r$  و مستقيمه المقاربين.
- (II) الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة  $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$  و  $C_g$  منحنى الدالة  $g$ .
- (1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  فان  $g(x) = f(-x)$ .
- استنتج انه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول  $C_r$  الى  $C_g$ .
- (2) أنشئ في نفس العلم السابق  $C_g$  (دون دراسة الدالة  $g$ ).

✓ الحل :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \quad (1)$$

دراسة تغيرات الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0 \quad \text{لأن}$$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا :

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } e^x - 1 = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

من اجل كل  $x \neq 0$  :  $f'(x) > 0$

إذن الدالة  $f$  متزايدة

تماما على  $\mathbb{R}$

جدول تغيرات  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$\circ$	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$



(2) بما أن  $f'(x)$  يتعدى عند  $x=0$  ولا يغير إشارته في جوار الصفر فإن النقطة

$(0, f(0))$  هي نقطة انعطاف

لدينا  $f(0)=1$  إذن  $\omega(0,1)$

- معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة  $\omega$

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = 0(x-0) + 1 = 1$$

إذن معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة  $\omega$  هي  $y=1$

- إثبات أن  $\omega$  مركز تناظر للمنحنى  $C_f$

$m(0,1)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$  يكافئ

$$f(2 \times 0 - x) = 2 - f(x)$$

$$f(-x) = -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} = -x - 1 + \frac{4e^x}{1 + e^x} \dots (1)$$

$$2 - f(x) = 2 - x - 1 - \frac{4}{e^x + 1} = 1 - x - \frac{4}{e^x + 1}$$

$$= -x - 1 + 4 - \frac{4}{e^x + 1}$$

$$= -x - 1 + \frac{4e^x + 4 - 4}{e^x + 1}$$

$$= -x - 1 + \frac{4e^x}{e^x + 1} \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد  $f(2 \times 0 - x) = 2 - f(x)$

إذن  $\omega(0,1)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x - 3 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -4 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = 1 \text{ لأن}$$

من النهايتين السابقتين نستنتج أن  $(C_f)$  له مستقيم مقارب مائل معادلته  $y = x - 1$

بجوار  $(+\infty)$  و مستقيم مقارب مائل معادلته  $y = x + 3$  بجوار  $(-\infty)$

$$f(-2.76) \approx 1.90 \text{ و } f(-2.77) \approx -5.86 \quad (4)$$

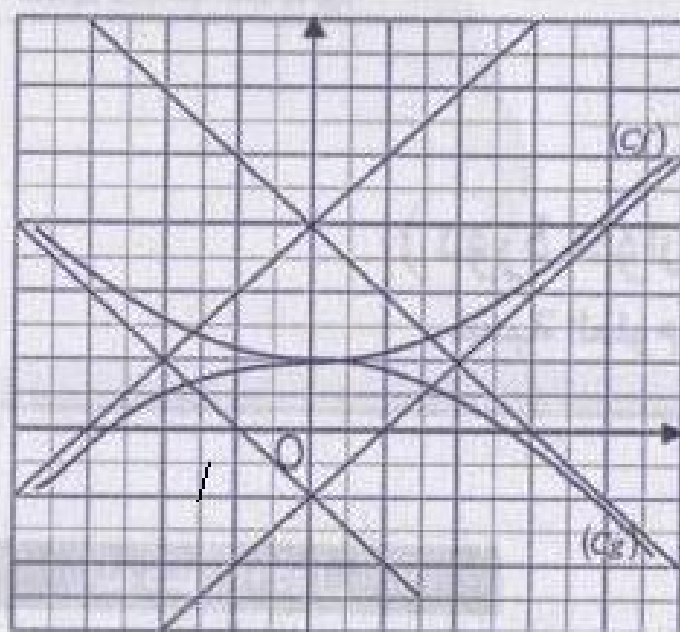
الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $[-2.77, -2.76]$  و  $f(-2.77) \times f(-2.76) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم للتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $x_0$  من  $[-2.77, -2.76]$

$$\text{بحيث } f(x_0) = 0$$

و هذا يعني أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيات

$$(x_0, 0)$$



$$f(1) = \frac{4}{e+1} \approx 1,075$$

$$f(-1) = -2 + \frac{4}{e^{-1}+1} \approx 0,924$$

القيمة المدورة لـ  $f(1)$  إلى  $10^{-2}$  هي 1,08

و القيمة المدورة لـ  $f(-1)$  إلى  $10^{-2}$  هي 0,90

الرسم :

$$g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1} \quad (II)$$

(1) إثبات أن  $g(x) = f(-x)$

$$f(-x) = -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1}$$

$$= -x - 1 + \frac{4e^x}{1 + e^x}$$

$$= -x - 1 + \frac{4e^x + 4 - 4}{1 + e^x}$$

$$= -x - 1 + \frac{4(e^x + 1) - 4}{e^x + 1}$$

$$= -x - 1 + 4 - \frac{4}{e^x + 1}$$

$$= -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1} = g(x)$$

- استنتاج التحويل النقطي الذي يحول  $C_r$  إلى  $C_g$

$$\begin{cases} y' = y \\ x' = -x \end{cases}$$

هذا هو التحويل الذي يحول  $C_r$  إلى  $C_g$

و هو تناظري محوري بالنسبة إلى المستقيم  $x = 0$

(2)  $(C_g)$  هو نظير  $(C_r)$  بالنسبة إلى التناظر الذي محوره المستقيم  $x = 0$

## ( دورة جوان 2008 )

### شعبة العلوم التجريبية

#### الموضوع الأول

#### التمرين الأول : ( 4.5 نقطة )

( 1 ) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة :  $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$

نرمز للحلين بـ  $z_1$  و  $z_2$  حيث  $|z_1| < |z_2|$

بين أن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي

( 2 ) المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . لنكن  $A$  ،  $B$  و  $C$  نقاط

من المستوى التي لاحقتها على الترتيب  $1$  ،  $z_1$  ،  $z_2$  .

ليكن  $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$  ، حيث العدد المركب حيث

( 1 ) انطلاقا من التعريف  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  و من الخاصية :  $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن :  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$  و أن  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$  حيث  $\theta$  ،  $\theta_1$  و  $\theta_2$  أعداد حقيقية

( ب ) اكتب  $Z$  على الشكل الأسّي

( ج ) اكتب  $Z$  على الشكل الثلاثي و استنتج أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $B$  بتشابه مباشر مركزه  $A$  ، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

✓ الحل :

( 1 ) حل المعادلة  $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$

مميز هذه المعادلة هو :

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4(-1+i) \\ = 1 + 4i - 4 + 4 - 4i = 1$$

إذن للعادلة لها حلان هما

$$z_1 = \frac{1+2i-1}{2} = i \quad z_2 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i$$

- إثبات أن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)(-i)}{1(-i)} = \frac{-i+1}{1} = 1-i$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(1-i) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

مع  $k$  عدد صحيح

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = \frac{-\pi}{4} \times 2008 + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = -502\pi + 4016k\pi \quad \text{إذن}$$

حتى يكون  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي يجب أن يكون  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = k'\pi$  مع

$k'$  عدد صحيح

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008} = (-502 + 4016k)\pi = k'\pi$$

مع  $k' = -502 + 4016k$

إذن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي

$$(2) \quad A(1), B(z_1), C(z_2) \quad \text{و} \quad Z = \frac{z_2-1}{z_1-1}$$

(1) لدينا ،  $e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta}$ .....

و لدينا من جهة أخرى ،

$$e^{i(\theta-\theta)} = e^{i \cdot 0} = e^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \quad \text{.....(2)}$$

من (1) و (2) نجد ،  $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1$  و منه ينتج  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

- لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} &= e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} \\ &= e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} \\ &= e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

(ب) كتابة  $Z$  على الشكل الآسي :

$$Z = \frac{1+i-1}{i-1} = \frac{i}{-1+i}$$

الكتابة الأسية للعدد  $i$  هي  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  و الكتابة الأسية للعدد  $-1+i$  هي  $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  إذن ،

$$Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4})}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

(ج) كتابة  $Z$  على الشكل النثني ،

$$\arg(Z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{و} \quad |Z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \text{إذن}$$

$$- \text{لدينا } Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} \quad \text{و منه ينتج ، } z_2 - 1 = Z(z_1 - 1)$$

$$\text{أي ، } z_2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) (z_1 - 1)$$

$$\text{أي ، } z_2 - z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) (z_1 - z_1)$$

و منه نستنتج أن النقطة  $C$  ذات اللاحقة  $z_2$  هي صورة النقطة  $B$  ذات اللاحقة  $z_1$  بتشابه مباشر مركزه النقطة  $A$  و نسبته  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  و زاويته  $-\frac{\pi}{4}$

### التمرين الثاني : (04 نقطة)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته ،

$$x + 2y - z + 7 = 0$$

و النقط  $A(2, 0, 1)$  و  $B(3, 2, 0)$  و  $C(-1, -2, 2)$

(1) تحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست على استقامية ، ثم بين أن العادلة الديكارية

$$\text{للمستوي } (ABC) \text{ هي } y + 2z - 2 = 0$$

(2) تحقق أن المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  متعامدان ، ثم عرّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم

$$(\Delta) \text{ مستقيم تقاطع } (P) \text{ و } (ABC).$$

(ب) احسب المسافة بين  $A$  و المستقيم  $(\Delta)$



(3) لتكن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, 1), (B, \alpha), (C, \beta)\}$  حيث  $\alpha, \beta$  عدنان حقيقيان يحققان  $1 + \alpha + \beta \neq 0$  عين  $\alpha$  حتى تنتمي النقطة  $G$  إلى المستقيم  $(\Delta)$

✓ الحل :

$$(P) : x + 2y - z + 7 = 0$$

$$A(2, 0, 1) \text{ و } B(3, 2, 0) \text{ و } C(-1, -2, 2)$$

(1) لاثبات أن النقط  $A, B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة يجب أن نبين أن الشعاعان  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطين خطيا

$$\vec{AC}(-3, -2, 1), \vec{AB}(1, 2, -1)$$

نلاحظ أن  $\frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{1} \neq \frac{-2}{2}$  وبالتالي الشعاعان  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطين خطيا و عليه

فالنقاط  $A, B$  و  $C$  ليست على استقامة واحدة

- تعيين معادلة المستوي  $(ABC)$

ليكن  $\vec{n}(a, b, c)$  الشعاع الناضم لـ  $(ABC)$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ تعني } a + 2b - c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ تعني } -3a - 2b + c = 0 \quad (2)$$

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد  $-2a = 0$  و منه  $a = 0$

نعوض قيمة  $a$  في (1) نجد  $c = 2b$

وبما أن  $(ABC)$  له معادلة من الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ فإنها تصبح}$$

$$by + 2bz + d = 0 \text{ و بالقسمة على } b \text{ (لأن } \vec{n} \neq \vec{0} \text{) نجد } y + 2z + \frac{d}{b} = 0$$

$$A \text{ نقطة من } (ABC) \text{ يعني } 0 + 2 \times 1 + \frac{d}{b} = 0$$

$$\text{و منه نجد } \frac{d}{b} = -2$$

إذن المعادلة الديكارية للمستوي  $(ABC)$  هي  $y + 2z - 2 = 0$

(2) (1)  $(P)$  يعامد  $(ABC)$  تعني  $\vec{n}_P \perp \vec{n}_{(ABC)}$

الشعاع الناضم لـ  $(P)$  هو  $\vec{n}_P(1, 2, -1)$  و

الشعاع الناضم لـ  $(ABC)$  هو  $\vec{n}_{(ABC)}(0, 1, 2)$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{(ABC)} = 1 \times 0 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 0$$

إذن الشعاعان  $\vec{n}_{(ABC)}$  و  $\vec{n}_P$  متعامدان وعليه فالستويان  $(P)$  و  $(ABC)$  متعامدان

- تعيين التمثيل الوسيط للمستقيم  $(\Delta)$  حيث  $(\Delta) = (P) \cap (ABC)$

لتكن  $M(x, y, z)$  نقطة من  $(\Delta)$  إذن تنتمي إلى  $(P)$  و تنتمي إلى  $(ABC)$

$M$  تنتمي إلى  $(P)$  تعني  $x + 2y - z + 7 = 0$  (1)

$M$  تنتمي إلى  $(ABC)$  تعني  $y + 2z - 2 = 0$  (2)

من (2) نجد  $y = -2z + 2$

نعوض عبارة  $y$  في (1) نجد  $x + 2(-2z + 2) - z + 7 = 0$

بالتبسيط نجد  $x - 5z + 11 = 0$  ومنه نجد  $x = 5z + 11$

بوضع  $z = \lambda$  مع  $\lambda \in \mathbb{R}$  يكون

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x = 5\lambda + 11 \\ y = -2\lambda + 2 \\ z = \lambda + 0 \end{cases} \text{ (I)}$$

الجملة (I) هي التمثيل الوسيط للمستقيم  $(\Delta)$

(ب) حساب المسافة بين النقطة  $A$  و المستقيم  $(\Delta)$

لتكن  $M$  نقطة من  $(\Delta)$

المسافة بين النقطة  $A$  و المستقيم  $(\Delta)$  هي أصغر قيمة للطول  $AM$

$$\begin{aligned} AM^2 &= (5\lambda + 11 - 2)^2 + (-2\lambda + 2)^2 + (\lambda - 1)^2 \\ &= (5\lambda + 9)^2 + (2\lambda - 2)^2 + (\lambda - 1)^2 \\ &= 25\lambda^2 + 90\lambda + 81 + 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + (\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\ &= 25\lambda^2 + 90\lambda + 81 + 5\lambda^2 - 10\lambda + 5 \\ &= 30\lambda^2 + 80\lambda + 86 \end{aligned}$$

نضع  $f(\lambda) = AM^2$

$AM^2$  أصغرية تكافئ

أصغرية

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق

على  $\mathbb{R}$

ولدينا  $f'(\lambda) = 60\lambda + 80$

و إشارتها مبنونة في الجدول

التالي

$\lambda$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(\lambda)$	-	0	+
$f(\lambda)$	$+\infty$	$f\left(-\frac{4}{3}\right)$	$+\infty$

أصغر قيمة لـ  $f$  هي  $f\left(-\frac{4}{3}\right)$  ومنه أصغر قيمة لـ  $AM$  هي  $\sqrt{f\left(-\frac{4}{3}\right)}$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{4}{3}\right) &= 30\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 80\left(-\frac{4}{3}\right) + 86 = 30 \times \frac{16}{9} - \frac{320}{3} + 86 \\ &= \frac{294}{9} = \frac{98}{3} \end{aligned}$$

إذن المسافة بين النقطة  $A$  و المستقيم  $(\Delta)$  هي  $\sqrt{\frac{98}{3}}$   
(3) إحداثيات  $G$  هي :

$$\begin{cases} x_G = \frac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta} \\ y_G = \frac{0+2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} \\ z_G = \frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases} \quad \text{بالتعويض نجد} \quad \begin{cases} x_G = \frac{x_A + \alpha x_B + \beta x_C}{1+\alpha+\beta} \\ y_G = \frac{y_A + \alpha y_B + \beta y_C}{1+\alpha+\beta} \\ z_G = \frac{z_A + \alpha z_B + \beta z_C}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

$G$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  يعني أن  $G$  تنتمي إلى  $(ABC)$  وتنتمي إلى  $(P)$  وهذا يعني أن :

$$\begin{cases} \frac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{4\alpha-4\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{-1-2\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{7+7\alpha+7\beta}{1+\alpha+\beta} = 0 \\ \frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{2+4\beta}{1+\alpha+\beta} + \frac{-2-2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} = 0 \end{cases} \quad \text{ومن هنا ينتج:}$$

$$\begin{cases} 2+3\alpha-\beta+4\alpha-4\beta-1-2\beta+7+7\alpha+7\beta=0 \\ 2\alpha-2\beta+2+4\beta-2-2\alpha-2\beta=0 \end{cases} \quad \text{بالتبسيط نجد:}$$

$$\begin{cases} 14\alpha+8=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{-8}{14} = \frac{-4}{7} \quad \text{ومن هنا}$$

### التمرين الثالث : ( 04 نقط )

(1) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $I = [1, 2]$  بالعلاقة :  $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

(أ) بين أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$  ،  $f(x)$  تنتمي إلى  $I$

(2)  $(u_n)$  هي المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يأتي :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{3}{2}$$

(أ) برهن بالراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n$  ينتمي إلى  $I$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة

(3) (أ) برهن بالراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

(ب) عين النهاية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

✓ الحل :

(1) إثبات أن  $f$  متزايدة تماما على  $I$   
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]-4; 3[$  فهي قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا ،

$$f'(x) = \frac{(-x+4) - (-1)(x+2)}{(-x+4)^2} = \frac{6}{(-x+4)^2}$$

من أجل كل  $x \in I$  :  $f'(x) > 0$  ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$   
 بما أن الدالة  $f$  متزايدة على  $I$  فإنه من كل  $x$  من  $I$  يكون،

$$f(2) \geq f(x) \geq f(1)$$

$$f(2) = \frac{2+2}{-2+4} = 2 \quad \text{و} \quad f(1) = \frac{1+2}{-1+4} = \frac{3}{3} = 1$$

$$2 \geq f(x) \geq 1$$

وبالتالي  $f(x) \in I$

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{3}{2} \quad (2)$$

(1) إثبات بالتراجع أن  $u_n \in I$

- من أجل  $n=0$  :  $u_0 = \frac{3}{2} \in I$  إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي  $n$  أي  $u_n \in I$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  أي  $u_{n+1} \in I$

$u_n \in I$  تعني  $1 \leq u_n \leq 2$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$  فإن

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \quad \text{لكن} \quad f(1) = 1 \quad \text{و} \quad f(2) = 2 \quad \text{و} \quad f(u_n) = u_{n+1}$$

إذن  $1 \leq u_{n+1} \leq 2$  وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \in I$

(ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} - u_n$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2 + u_n^2 - 4u_n}{-u_n + 4} \\ &= \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4} \end{aligned}$$

بما أن  $1 \leq u_n \leq 2$  فإن  $u_n - 1 \geq 0$  و  $u_n - 2 \leq 0$  و  $-u_n + 4 > 0$

$$\frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{-u_n + 4} \geq 0$$

إذن للمتتالية  $(u_n)$  متزايدة

بما أن  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 2 فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي  $l$

$$(3) \text{ اثبت بالتراجع أن } u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

من أجل  $n=0$  لدينا ،  $u_0 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 1}$  إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي  $n$  أي،

$$u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$$

و نرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  أي

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{-u_n + 4} = \frac{1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 2}{-1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{3 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 4}{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1 + 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1} \end{aligned}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  و منه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$

ب) بما أن  $\frac{3}{2} > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = 0$

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$



### التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2, +\infty[$  كما يأتي ،  

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$$
 حيث  $a$  و  $b$  عددان حقيقيان.

$(C_f)$  المنحنى للمثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $1cm$ .  
 عيّن قيمتي  $a$  و  $b$  بحيث تكون النقطة  $A(-1, 1)$  تنتمي إلى  $(C_f)$  و معامل توجيه المماس عند  $A$  يساوي  $(-e)$

II) نعتبر الدالة العددية  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $[-2, +\infty[$  كالآتي ،  

$$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$
 و  $(C_g)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

- بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  و فسر هذه النتيجة بيانياً. (نذكر أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = 0$ )
- أدرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم أنشئ جدول تغيراتها.
- بين أن للمنحنى  $(C_g)$  يقبل نقطة انعطاف  $I$  يطلب تعيين إحداثياتها.
- أكتب معادلة المماس لمنحنى  $(C_g)$  عند النقطة  $I$
- ارسم  $(C_g)$

و)  $H$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-2, +\infty[$  كالآتي ،  

$$H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$$
 حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عددان حقيقيان.  
 عيّن  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون  $H$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto g(x) - 1$  ،  
 استنتج الدالة الأصلية للدالة  $g$  و التي تنعدم عند القيمة  $0$ .

III) لتكن  $k$  الدالة المعرفة على المجال  $[-2, +\infty[$  كالآتي ،  $k(x) = g(x^2)$  ،  
 باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغير الدالة  $k$  ثم شكل جدول تغيراتها

✓ **الحل :**

$$\begin{aligned}
 & f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1 \quad (1) \\
 & A(-1, 1) \text{ تنتمي إلى } (C_f) \text{ يعني } f(-1) = 1 \\
 & f(-1) = 1 \text{ تعني } (-a+b)e + 1 = 1 \\
 & \text{تعني } (-a+b)e = 0 \text{ و منه } -a+b = 0 \text{ أي } a=b \\
 & \text{معامل توجيه المماس عند } A \text{ يساوي } -e \text{ يعني } f'(-1) = -e \\
 & f'(-1) = -e \text{ الدالة قابلة للاشتقاق على } [-2, +\infty[ \text{ و لدينا} \\
 & f'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax+b) \\
 & \quad = (a-ax-b)e^{-x}
 \end{aligned}$$

$$(a+a-b)e = -e \text{ تعني } f'(-1) = -e$$

و منه ينتج  $2a-b = -1$  ..... (\*)

نعوض عبارة  $a$  في (\*) نجد :  $2b-b = -1$  و منه  $b = -1$  و عليه  $a = -1$

$$a = b = -1$$

$$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1 \quad (II)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-xe^{-x} - e^{-x} + 1] \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} Xe^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

و هذا يعني أن  $(C_g)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته  $y = 1$  بجوار  $(+\infty)$

ب) دراسة تغيرات  $g$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $[-2, +\infty[$  و لدينا

$$g'(x) = xe^{-x}$$

$$x = 0 \text{ تكافئ } g'(x) = 0$$

- إذا كان  $x \in [-2, 0]$  فإن  $g'(x) < 0$  و بالتالي  $g$  متناقصة تماما

- إذا كان  $x > 0$  فإن  $g'(x) > 0$  و بالتالي الدالة  $g$  متزايدة تماما.

و جدول تغيرات  $g$  هو

$$g(0) = 0$$

$$g(-2) = e^{-1} + 1 = \frac{1}{e} + 1$$

ج) الدالة  $g'$  قابلة للاشتقاق

على  $[-2, +\infty[$  و لدينا

$$g''(x) = e^{-x} - e^{-x}x = (1-x)e^{-x}$$

$$x = 1 \text{ تكافئ } 1-x = 0 \text{ تكافئ } g''(x) = 0$$

$g''(x)$  يتغير عند  $x = 1$  مغيرا إشارته في جوار 1

إذن النقطة  $I(1, g(1))$  هي نقطة انعطاف لـ  $(C_g)$

$$g(1) = -2e^{-1} + 1 \text{ إذن } I(1, 1-2e^{-1})$$

د) معادلة المماس لـ  $(C_g)$  عند  $I$  هي  $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$$y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{3}{e} \text{ إذن } g'(1) = 1e^{-1} = \frac{1}{e}$$

هـ) رسم  $(C_g)$

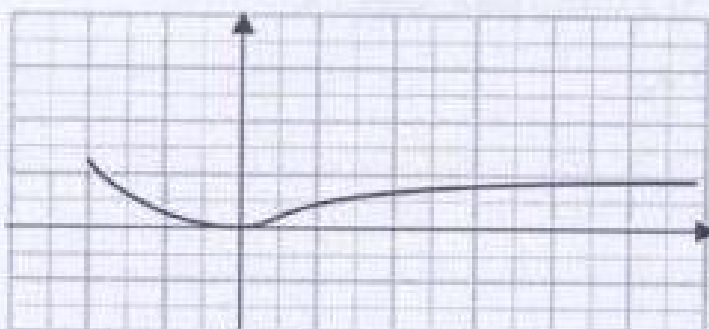
$$g(-2) = 1,37$$

$$H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x} \quad (و)$$

// هي الدالة الأصلية لـ  $g(x) - 1$

تعني أن من أجل كل  $x \in [-2, +\infty[$

$x$	-2	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		-	+
تغيرات $g$	$g(-2)$	$g(0)$	1



$$H'(x) = g(x) - 1$$

$$H'(x) = \alpha e^{-x} - e^{-x}(\alpha x + \beta)$$

$$H'(x) = e^{-x}(\alpha - \alpha x - \beta)$$

$$g(x) - 1 = (-x - 1)e^{-x}$$

بالمطابقة بين عبارة  $g(x) - 1$  و  $H'(x)$  نجد من أجل كل  $x$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \alpha + 1 = 2 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = -1 \\ -\alpha = -1 \end{cases} \quad \text{منه ينتج} \quad \alpha - \beta - \alpha x = -x - 1$$

- الدالة الأصلية للدالة  $g$  و التي تنعدم عند الصفر هي  $\int g(t)dt$

$$\begin{aligned} \int g(t)dt &= \int (g(t) - 1 + 1)dt = \int (g(t) - 1)dt + \int 1dt \\ &= [H(t)]_0^x + x = H(x) - H(0) + x \\ &= (x + 2)e^{-x} - 2 + x \end{aligned}$$

إذن الدالة الأصلية للدالة  $g$  و التي تنعدم عند الصفر هي  $x \mapsto x - 2 + (x + 2)e^{-x}$

$$k(x) = g(x^2) \quad (\text{III})$$

نضع  $u(x) = x^2$  و  $k = g \circ u$  منه

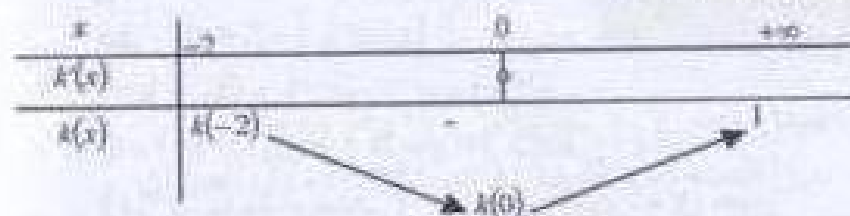
الدالة  $u$  متناقصة على المجال  $[-2, 0]$  و الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $[0, 2]$

إذن الدالة  $k$  متناقصة تماما على المجال  $[-2, 0]$

الدالة  $u$  متزايدة تماما على المجال  $[0, +\infty[$  و الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[0, +\infty[$

إذن الدالة  $k$  متزايدة تماما على المجال  $[0, +\infty[$

و جدول تغيرات  $k$  هو



$$\lim_{x \rightarrow -2} k(x) = \lim_{x \rightarrow -2} g(x^2) = \lim_{y \rightarrow 4} g(y) = 1$$

$$k(-2) = g(4) = -5e^{-4} + 1$$

$$k(0) = g(0) = 0$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول : ( 03 نقط )

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عين الجواب الصحيح معللا اختيارك

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقط ،

$$D(3, 2, 1) , C(-2, 0, -2) , B(4, 1, 0) , A(1, 3, -1)$$

و المستوى  $(P)$  الذي معادلته :  $x - 3z - 4 = 0$

(1) المستوى  $(P)$  هو : (1 ج)  $(BCD)$  ، (2 ج)  $(ABC)$  ، (3 ج)  $(ABD)$

(2) شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$  هو :

$$(1) \vec{n}_1(1, 2, 1) \text{ ، } (2) \vec{n}_2(-2, 0, 6) \text{ ، } (3) \vec{n}_3(2, 0, -1)$$

المسافة بين النقطه  $D$  و المستوى  $(P)$  هي : (1 ج)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  ، (2 ج)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  ، (3 ج)  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

✓ الحل :

$$D(3, 2, 1) , C(-2, 0, -2) , B(4, 1, 0) , A(1, 3, -1)$$

و  $(P) : x - 3z - 4 = 0$

$$(1) x_A - 3z_A - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$x_B - 3z_B - 4 = 4 - 3 \times 0 - 4 = 0$$

$$x_C - 3z_C - 4 = -2 - 3(-2) - 4 = 0$$

النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى المستوى  $(P)$  و بما أن  $\vec{AB}(3, -2, 1)$  و  $\vec{AC}(-3, -3, -1)$

غير مرتبطين خطيا فإن المستوى  $(P)$  هو  $(ABC)$

(2) الشعاع الناظم للمستوي  $(P)$  هو  $\vec{n}(1, 0, -3)$  لكن  $\vec{n}_2 = -2\vec{n}$

إذن الشعاع  $\vec{n}_2$  هو أيضا شعاع ناظم لـ  $(P)$  و بالتالي نختار الجواب 2

(3) المسافة بين النقطه  $D$  و المستوى  $(P)$  هي

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{|x_D - 3z_D - 4|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|3 - 3 - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

إذن نختار الجواب 3

التمرين الثاني : (05 نقاط)

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_0 = \frac{5}{2} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$$

(1) ا) ارسم في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ، المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$

والنقطة  $(d)$  المثل للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود :  $u_4, u_3, u_2, u_1, u_0$

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تقاربها.

(2) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n, u_n \leq 6$

ب) تحقق أن  $(u_n)$  متزايدة.

ج) هل  $(u_n)$  متقاربة ؟ برر اجابتك.

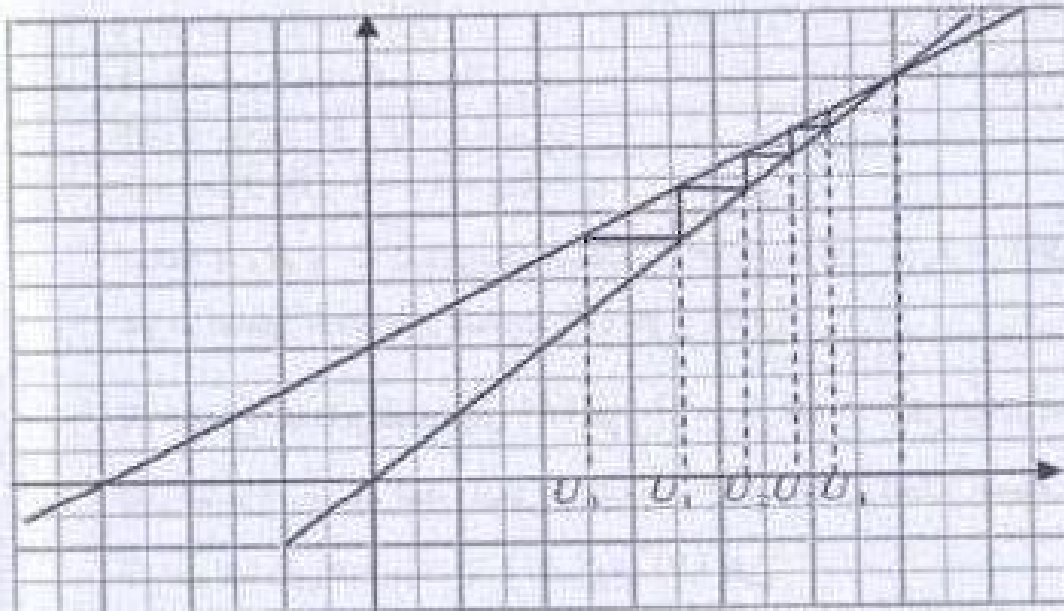
(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n, v_n = u_n - 6$

ا) اثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب) اكتب عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

✓ الحل :

(1) ا)



- المستقيم  $(\Delta)$  يمر بالنقطتين  $O(0,0)$  و  $A(1,1)$

- المستقيم  $(d)$  يمر بالنقطتين  $A(-3,0)$  و  $B(0,2)$

ج) من الشكل نستطيع أن نخمن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و متقاربة نحو العدد 6

(2) ا) اثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n, u_n \leq 6$



• من أجل  $n=0$  ،  $u_0 = \frac{5}{2}$  و  $\frac{5}{2} \leq 6$  إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$

• نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي  $u_n \leq 6$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  أي  $u_{n+1} \leq 6$

لدينا ،  $u_n \leq 6$  و بالضرب الطرفين في  $\frac{2}{3}$  نجد  $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{12}{3}$

أي  $\frac{2}{3}u_n \leq 4$  و بإضافة 2 إلى الطرفين نجد  $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$

أي  $u_{n+1} \leq 6$  و منه الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n \leq 6$

(ب) التحقق أن  $(u_n)$  متزايدة ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$$

$$= -\frac{1}{3}u_n + 2$$

$$= -\frac{1}{3}(u_n - 6)$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، لدينا  $u_n \leq 6$  فإن

$u_n - 6 \leq 0$  و منه  $-\frac{1}{3}(u_n - 6) \geq 0$  و عليه فالمتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

(ج) بما أن  $(u_n)$  متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة

(3) نضع ،  $v_n = u_n - 6$

(أ) إثبات أن  $(v_n)$  هندسية

$(v_n)$  هندسية يعني ،  $v_{n+1} = v_n \times q$

حيث  $q$  هو الأساس

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$$

$$= \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4$$

$$= \frac{2}{3}(v_n + 6) - 4$$

$$= \frac{2}{3}v_n + 4 - 4 = \frac{2}{3}v_n$$

إذن  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{2}{3}$

و حدها الأول  $v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$

(ب)

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$= -\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لدينا

$$u_n = v_n + 6 \text{ و منه } v_n = u_n - 6$$

$$\text{إذن } u_n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$$

$$\text{بما أن } \frac{2}{3} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 6$$

### التمرين الثالث : ( 05 نقط )

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :

$$z^2 + iz - 2 - 6i = 0$$

(2) نعتبر في المستوى المركب للنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  النقطتين

$A$  و  $B$  اللتين لاحقتهما  $z_A$  و  $z_B$  على الترتيب حيث :

$$z_A = 2 + i \text{ و } z_B = -2 - 2i$$

عين  $z_c$  لاحقة النقطة  $\omega$  مركز الدائرة  $(\Gamma)$  ذات القطر  $[AB]$ .

(3) لتكن  $C$  النقطة ذات اللاحقة  $z_c$  حيث  $z_c = \frac{4-i}{1+i}$

اكتب  $z_c$  على الشكل الجبري ثم اثبت أن النقطة  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$

(4) ابرهن أن عبارة التشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $M_0(z_0)$  ونسبته  $k$  ( $k \neq 0$ ) وزاويته  $\theta$  و الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  هي :

$$z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$$

ب) تطبق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل  $S$  العرف ب :

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \left( z + \frac{1}{2}i \right)$$

✓ الحل :

(1) حل المعادلة  $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

$$\Delta = i^2 - 4(-2 - 6i)$$

$$\Delta = -1 + 8 + 24i = 7 + 24i$$

ليكن  $\sigma$  الجذر التربيعي لـ  $\Delta$  إذن  $\sigma^2 = \Delta$  حيث

$$\sigma = x + iy$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \dots\dots\dots (1) \\ 2xy = 24 \dots\dots\dots (2) \\ x^2 + y^2 = 25 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ تعني } \sigma^2 = \Delta$$

بجمع (1) و (3) طرف لطرف نجد ،  $2x^2 = 32$  و منه  $x^2 = 16$

$x^2 = 16$  تكافئ  $(x=4)$  أو  $(x=-4)$

إذا كان  $(x=4)$  فإن  $y=3$

إذا كان  $(x=-4)$  فإن  $y=-3$

إذن  $\sigma_1 = 4+3i$  و  $\sigma_2 = -4-3i$

إذن المعادلة المعطاة لها حلين هما

$$z_1 = \frac{-i+4+3i}{2} = 2+i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-i-4-3i}{2} = -2-2i$$

$$(2) \quad z_A = 2+i \quad \text{و} \quad z_B = -2-2i$$

مركز الدائرة التي قطرها  $[AB]$  هو منتصف  $[AB]$

$$z_o = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+i-2-2i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

$$(3) \quad \text{لدينا،} \quad z_C = \frac{4-i}{1+i}$$

كتابة  $z_C$  على الشكل الجبري

$$z_C = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-5i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

إثبات أن النقطة  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$

$$C \text{ تنتمي إلى } (\Gamma) \text{ تعني أن } |z_C - z_o| = \frac{AB}{2}$$

$$|z_C - z_o| = \left| \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2-2i-2-i|}{2} = \frac{|-4-3i|}{2} = \frac{\sqrt{16+9}}{2} = \frac{5}{2}$$

إذن النقطة  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$

$$(4) \quad M(z) \mapsto M'(z) \quad S : \text{ مركزه النقطة } M_0 \text{ ونسبته } k \text{ حيث } k > 0$$

إذن

$$\begin{cases} M_0 M' = k M_0 M \\ \left( \vec{M_0 M}, \vec{M_0 M'} \right) = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$|z' - z_0| = k|z - z_0| \text{ تكافئ } M_0M' = kM_0M -$$

$$\frac{|z' - z_0|}{|z - z_0|} = k \text{ إذن}$$

$$\arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) = \theta + 2k\pi \text{ تعني } \left(\vec{M_0M}, \vec{M_0M'}\right) = \theta + 2k\pi -$$

إذن العدد  $\frac{z' - z_0}{z - z_0}$  طويلته  $k$  و عمده  $\theta$  و بالتالي الشكل الأسى له هو :

$$\frac{z' - z_0}{z - z_0} = ke^{i\theta} \text{ و بالضرب الطرفين في } z - z_0 \text{ نجد:}$$

$$z' - z_0 = (z - z_0) \times ke^{i\theta}$$

$$S : M(z) \mapsto M'(z) \text{ ب)}$$

$$z' + \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right) \text{ و هذه الأخيرة تكتب:}$$

$$z' - \left(-\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z - \left(-\frac{1}{2}i\right)\right) \text{ أي}$$

$$z' - z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_0)$$

إذن هذا التحول هو تشابه مباشر مركزه النقطة  $\omega$  و نسبته 2 و زاويته  $\frac{\pi}{3}$

### التمرين الرابع: ( 07 نقاط)

المنحنى (C) القابل هو التمثيل البياني للدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  كما يأتي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1) ا) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة  $g$  و حدد  $g(0)$  و إشارة  $g\left(\frac{1}{2}\right)$

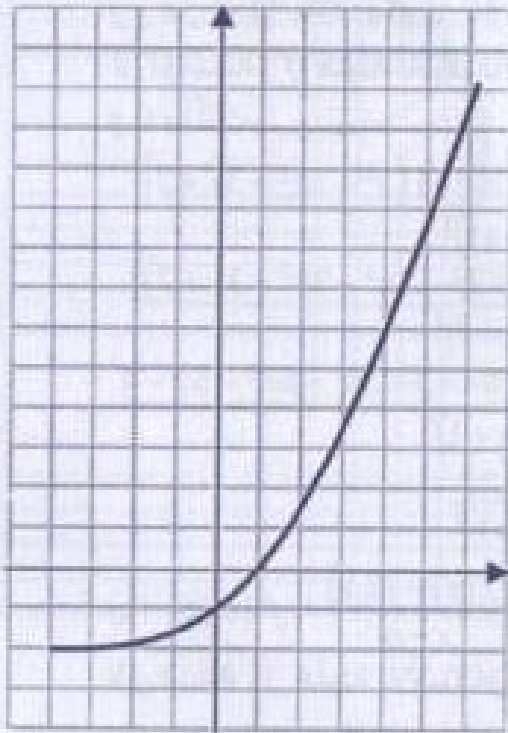
ب) علل وجود عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $\left]0, \frac{1}{2}\right[$  يحقق  $g(\alpha) = 0$

ج) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1, +\infty[$

2)  $f$  هي الدالة العددية المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

و ليكن  $(\Gamma)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$



(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}, \quad ]-1, +\infty[$$

حيث  $f'$  هي الدالة المشتقة للدالة  $f$

(ب) عين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  وفسر النتيجة بيانيا.

(ج) احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)]$

وفسر النتيجةين بيانيا.

(د) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

(3) ناخذ  $\alpha \approx 0,26$

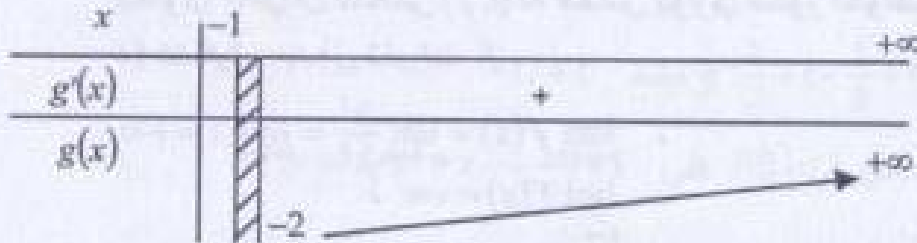
(أ) عين مدور  $f(x)$  إلى  $10^{-2}$

(ب) ارسم المنحنى  $(\Gamma)$

(4) (أ) اكتب  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.

(ب) عين  $F$  الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1, +\infty[$  والتي تحقق  $F(1) = 2$

✓ الحل :



(1) (أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة  $g$

نلاحظ من الرسم أن الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]-1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ و } g(0) = -1 \text{ و } g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

لأن من أجل  $\frac{1}{2} < x$  يكون  $(C_x)$  فوق  $(xx')$

(ب) بما أن الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  و  $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  فإن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من  $\left]0, \frac{1}{2}\right[$  بحيث  $g(\alpha) = 0$

(ج) استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $]-1, +\infty[$

من أجل  $-1 < \alpha < x$  يكون  $g(x) > 0$



- و من أجل  $x) \alpha$  يكون  $g(x) > 0$

(2) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $] -1, +\infty[$  ولدينا،

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)((x+1)(3x^2 + 6x + 3) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2))}{(x+1)^4} \\ &= \frac{3x^3 + 6x^2 + 3x + 3x^2 + 6x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \quad \text{ب)}$$

لأن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $\alpha$

$$f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = \frac{0}{(\alpha+1)^3} = 0$$

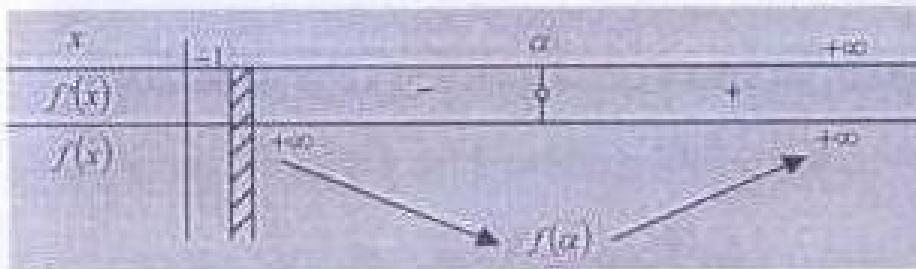
$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0 \quad \text{إذن،}$$

- المساواة  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0$  تعني أن  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $\alpha$  و عددها المشتق

يساوي 0 أي أن اللحنى  $(C_f)$  له مماس يوازي محور القواصل عند النقطة ذات الفاصلة 0

(د) تشكيل جدول تغيرات  $f$

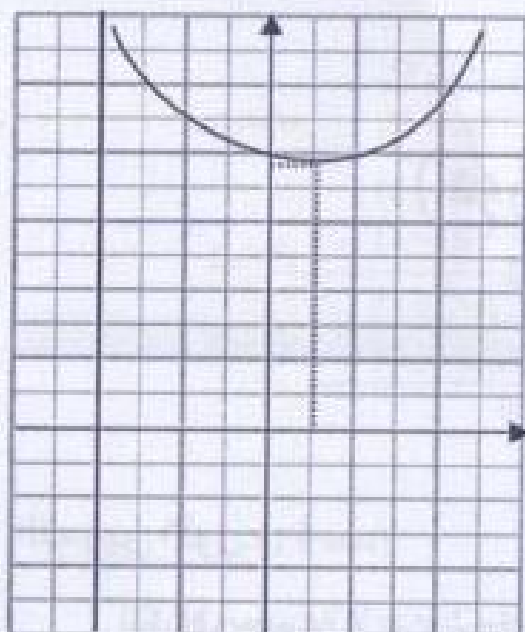
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$



إشارة  $f(x)$  هي  
من إشارة  $g(x)$

$$\alpha \approx 0,26 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 2}{(\alpha+1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 + 3}{(\alpha+1)^2} = \frac{g(\alpha) + 3}{(\alpha+1)^2} \\ &= \frac{3}{(\alpha+1)^2} \end{aligned}$$



$$f(\alpha) \approx \frac{3}{(0,26+1)^2} = \frac{3}{1,26^2} = \frac{3}{1,5876}$$

$$f(\alpha) \approx 1,889$$

و القيمة المدورة إلى  $10^{-2}$  هي 1,89

(ب) رسم المنحنى  $(\Gamma)$

(14)

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \\ \text{بالطرح} \quad x^3 + 2x^2 + x \\ \hline x^2 + 2x + 2 \\ \text{بالطرح} \quad x^2 + 2x + 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ \hline x + 1 \end{array}$$

$$\text{إذن } f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

(ب) الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$  هي  $x \mapsto \frac{-1}{x+1}$

و الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto x+1$  هي  $\frac{1}{2}x^2 + x$

إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي الدوال  $F$  حيث

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + C$$

$$F(1) = 2 \text{ تكافئ } \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + C = 2 \text{ ومنه } C = 1$$

و عليه الدالة  $F$  التي تحقق  $F(1) = 2$  هي  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1$

(ج)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  لأن

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} - (x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  تعني أن  $(\Gamma)$  له مستقيم مقارب عمودي (يوازي محور الزائيب)

معادلته  $x = -1$

## ( دورة جوان 2008 )

### شعبة تقني رياضي

#### التمرين الأول : ( 4 نقطة )

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلة (\*) المعرفة كما يلي :

$$Z^3 + (2 - 4i)Z^2 - (6 + 9i)Z + 9(-1 + i) = 0 \dots (*)$$

(1) بين أن  $Z_0 = 3i$  هو حل للمعادلة (\*)

(2) حل في  $C$  المعادلة (\*) ثم اكتب حلولها  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الشكل الأسّي

حيث  $|Z_1| < |Z_2|$

(3) لتكن  $A, B, C$  صور الحلول  $Z_0, Z_1, Z_2$  على الترتيب في مستوي منسوب إلى

معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

عين النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, 1), (B, 1), (C, -1)\}$ .

(4) عين المجموعة  $(E)$  للنقط حيث  $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

بين أن النقطة  $A$  تنتمي إلى المجموعة  $(E)$  ثم اثن  $(E)$

(5) تحقق أن النقط  $O, B, G$  في استقامية ثم عين صورة المجموعة  $(E)$  بالتحاكي

الذي مركزه النقطة  $O$  ويحول  $B$  إلى  $G$  محددا عناصره المميزة.

✓ الحل :

(1) التحقق من أن  $Z_0 = 3i$  حلا للمعادلة (\*)

$$\begin{aligned} (3i)^3 + (2 - 4i)(3i)^2 - (6 + 9i)(3i) + 9(-1 + i) \\ = -27i + (2 - 4i)(-9) - 18i - 27 - 9 + 9i \\ = -27i - 18 + 36i - 18i - 27 - 9 + 9i \\ = 0 \end{aligned}$$

(2) حل المعادلة (\*) ، المعادلة (\*) تكتب على الشكل

$$(Z - 3i)(Z^2 + bZ + c) = 0$$

$\begin{array}{r} \text{بالطرح} \\ Z^3 + (2-4i)Z^2 - (6+9i)Z + 9(-1+i) \\ \hline Z^3 - 3iZ^2 \end{array}$	$\begin{array}{r} Z - 3i \\ \hline Z^2 + (2-i)Z - 3 - 3i \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{بالطرح} \\ (2-i)Z^2 - (6+9i)Z + 9(-1+i) \\ \hline (2-i)Z^2 + (-6i-3)Z \end{array}$	
$\begin{array}{r} \text{بالطرح} \\ (-3-3i)Z + 9(-1+i) \\ \hline (-3-3i)Z + 9i - 9 \end{array}$	
$0$	

إذن المعادلة (\*) تكتب على الشكل:

$$(Z - 3i)(Z^2 + (2-i)Z - 3 - 3i) = 0$$

(\*) تكافئ

$$\begin{cases} Z - 3i = 0 \\ Z^2 + (2-i)Z - 3 - 3i = 0 \end{cases} \quad \text{أو}$$

نحل المعادلة

$$(*)' \dots\dots\dots Z^2 + (2-i)Z - 3 - 3i = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2-i)^2 - 4(1)(-3-3i) \\ &= 4 - 4i - 1 + 12 + 12i \\ &= 15 + 8i \end{aligned}$$

ليكن  $\sigma = x + iy$  جذرا تربيعيا لـ  $\Delta$  إذن  $\sigma^2 = \Delta$

$\sigma^2 = \Delta$  تكافئ

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \dots\dots\dots (1) \\ 2xy = 8 \dots\dots\dots (2) \\ x^2 + y^2 = 17 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

نجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد:  $2x^2 = 32$  و منه

$$x^2 = 16 \quad \text{إذن} \quad x = 4 \quad \text{أو} \quad x = -4$$

من أجل  $x = 4$  نجد  $y = 1$

من أجل  $x = -4$  نجد  $y = -1$

$$\text{إذن} \quad \sigma_1 = 4 + i \quad \text{و} \quad \sigma_2 = -4 - i$$

إذن المعادلة (\*) لها حلان هما،

$$Z_1 = \frac{-2+i+4+i}{2} = 1+i$$

$$Z_2 = \frac{-2+i-4-i}{2} = -3$$

و عليه فالمعادلة (\*) لها ثلاث حلول هي  $Z_2, Z_1, Z_0$

(3) نعين  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, 1), (B, 1), (C, -1)\}$

نرمز بـ  $Z_0$  إلى لاحقة النقطة  $G$  إذن

$$\begin{aligned} Z_G &= Z_A + Z_B - Z_C \\ &= Z_0 + Z_1 - Z_2 \\ &= 3i + 1 + i + 3 = 4 + 4i \\ \text{إذن إحداثيات } G \text{ هي } (4, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AM^2 + BM^2 - CM^2 &= \left( \vec{AG} + \vec{GM} \right)^2 + \left( \vec{BG} + \vec{GM} \right)^2 - \left( \vec{CG} + \vec{GM} \right)^2 \quad (4) \\ &= GM^2 + AG^2 + BG^2 - CG^2 \end{aligned}$$

لكن

$$\begin{aligned} AG^2 &= |Z_G - Z_A|^2 = |4 + 4i - 3i|^2 \\ &= |4 + i|^2 = 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BG^2 &= |Z_G - Z_B|^2 = |4 + 4i - 1 - i|^2 \\ &= |3 + 3i|^2 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CG^2 &= |Z_G - Z_C|^2 = |4 + 4i + 3|^2 \\ &= |7 + 4i|^2 = 65 \end{aligned}$$

$$\text{إذن } AM^2 + BM^2 - CM^2 = GM^2 - 30$$

$$\text{ومنه } AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13 \text{ تكافئ } GM^2 - 30 = -13$$

$$\text{تكافئ } GM^2 = 17$$

$$\text{تكافئ } GM = \sqrt{17}$$

و بالتالي المجموعة (E) هي دائرة

مركزها G و طول نصف قطرها  $\sqrt{17}$

- إثبات أن A تنتمي إلى (E)

$$\begin{aligned} GA^2 &= |Z_G - Z_A|^2 = |4 + 4i - 3i|^2 \\ &= |4 + i|^2 = 17 \end{aligned}$$

إذن A نقطة من (E)

$$\vec{OG}(4, 4) \text{ ، } \vec{OB}(1, 1) \quad (5)$$

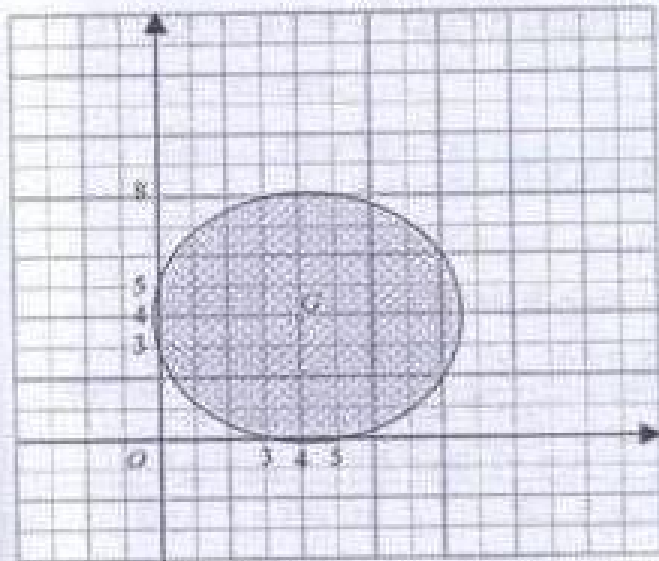
لاحظ أن  $\vec{OG} = 4\vec{OB}$  و منه النقط O ، B و G تقع على استقامة واحدة

- نسبة التماكي هي  $k = \frac{OG}{OB} = 4$

- صورة الدائرة (E) هي الدائرة (E') مركزها G' صورة G بالتماكي

و طول نصف قطرها هو  $R' = 4AG$

$$\vec{OG}' = 4\vec{OG} \text{ و لدينا } R' = 4AG = 4 \times \sqrt{17}$$





## التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(1, 2, 2)$  و  $B(3, 2, 1)$  و  $C(1, 3, 3)$  نقط من هذا الفضاء

(1) برهن أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية

(2) نعتبر المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين،

$$(P_1), x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$(P_2), x - 3y + 2z + 2 = 0$$

بين أن  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$

(3) بين أن النقطة  $C$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta)$

(4) بين أن الشعاع  $\vec{u}(2, 0, -1)$  هو أحد أشعة توجيه المستقيم  $(\Delta)$

(5) استنتج أن التمثيل الوسيط للمستقيم  $(\Delta)$  هو الجملة،

$$\text{حيث } (k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 3 \\ z = -k + 3 \end{cases}$$

(6) لنكن  $M$  نقطة من المستقيم  $(\Delta)$  ، أوجد قيمة الوسيط  $k$  حتى يكون الشعاعان

$\vec{AM}$  و  $\vec{u}$  متعامدين ، ثم استنتج المسافة بين النقطة  $A$  و المستقيم  $(\Delta)$

✓ **الحل :**

$$C(1, 3, 3), B(3, 2, 1), A(1, 2, 2)$$

(1) اثبات أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستوي

لايثبات أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستوي يجب اثبات أن  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطين خطيا

$$\vec{AC}(0, 1, 1), \vec{AB}(2, 0, -1)$$

نفرض أنه يوجد  $\lambda$  بحيث  $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$

$$\vec{AC} = \lambda \vec{AB} \text{ يكفي}$$

$$(I) \dots \begin{cases} 0 = 2\lambda \\ 1 = \lambda \times 0 = 0 \\ 1 = -\lambda \end{cases}$$

الجملة (I) مستحيلة لأن  $1 = 0$  خاطئة

إذن لا يوجد  $\lambda$  بحيث  $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$  ومنه الشعاعان  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطين خطيا و عليه

النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تعين مستوي

$$(P_1), x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad (2)$$

$$(P_2), x - 3y + 2z + 2 = 0$$

اثبات ان  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان في مستقيم  $(\Delta)$

ليكن  $\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_2$  ناظمي  $(P_1)$  و  $(P_2)$  على الترتيب

$$\vec{n}_1(1, -2, 2) \text{ و } \vec{n}_2(1, -3, 2)$$

بما ان  $\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{-2} \neq \frac{2}{2}$  فإن الشعاعين  $\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_2$  غير مرتبطين خطيا وبالتالي  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متقاطعان في مستقيم  $(\Delta)$ .

3) اثبات ان  $C$  تنتمي إلى  $(\Delta)$  يعني ان  $C$  تنتمي إلى  $(P_1)$  و  $C$  تنتمي إلى  $(P_2)$

لدينا  $1 - 2 \times 3 + 2 \times 3 - 1 = 1 - 6 + 6 - 1 = 0$  إذن  $C$  تنتمي إلى  $(P_1)$

لدينا  $1 - 3 \times 3 + 2 \times 3 + 2 = 1 - 9 + 6 + 2 = 0$  إذن  $C$  تنتمي إلى  $(P_2)$

4)  $\vec{u}(2, 0, -1)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$  لابد ان يكون

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ و } \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_1 = (2, 0, -1) \cdot (1, -2, 2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_2 = (2, 0, -1) \cdot (1, -3, 2)$$

$$= 2 + 0 - 2 = 0$$

إذن  $\vec{u}$  هو أحد أشعة توجيه للمستقيم  $(\Delta)$

5) لنكن  $M(x, y, z)$  نقطة من  $(\Delta)$

إذن يوجد  $\lambda$  بحيث  $\vec{CM} = \lambda \vec{u}$

$$\vec{CM}(x-1, y-3, z-3)$$

$$\vec{CM} = \lambda \vec{u} \text{ يكفي}$$

$$\begin{cases} x-1=2\lambda \\ y-3=0 \\ z-3=-\lambda \end{cases}$$

إذن:

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ مع } \begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=3 \\ z=-\lambda+3 \end{cases}$$

6) إيجاد قيمة  $k$  بحيث  $\vec{AM}$  و  $\vec{u}$  متعامدين

$$\vec{AM}(x-1, y-2, z-2)$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0 \text{ يكفي } 2(x-1) + 0(y-2) + (-1)(z-2) = 0$$

$$2x - 1 - z + 2 = 0 \text{ يكفي}$$

$$4k + 2 - 1 + k - 3 + 2 = 0 \text{ يكفي}$$

$$5k = 0 \text{ يكافئ}$$

$$k = 0 \text{ يكافئ}$$

المسافة بين  $A$  و  $M$  هي الطول  $AM$  من أجل  $k = 0$   
إحداثيات النقطة  $M$  هي  $C(1,3,3)$  إذن  $AM = AC = \sqrt{2}$

### التمرين الثالث : ( 7 نقط )

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0,2]$  بالعلاقة :  $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$   
(1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0,2]$ .

(ب) انشئ  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة على المحورين  $4 \text{ cm}$ ).

(ج) برهن أنه إذا كان  $x \in [0,2]$  فإن  $f(x) \in [0,2]$ .

(2) نعرف المتتالية العددية  $(U_n)$  على  $N$  كالآتي :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

(أ) برر وجود المتتالية  $(U_n)$  ، احسب الحدين  $U_1$  و  $U_2$

(ب) مثل الحدود  $U_0$  و  $U_1$  و  $U_2$  على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى

$(C)$  و المستقيم  $(D)$  ذو المعادلة  $y = x$

(ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير  $(U_n)$  و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

(3) (أ) برهن بالتراجع على العدد الطبيعي  $n$  أن  $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

(ب) برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  فإن  $U_{n+1} > U_n$  ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب  $(U_n)$  ؟

(ج) تحقق أن  $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2} (U_n - \sqrt{3})$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم

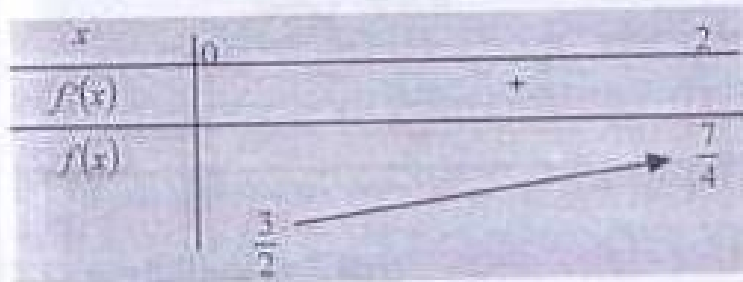
عبر عددا حقيقيا  $k$  من  $]0,1[$  بحيث  $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |U_n - \sqrt{3}|$

برهن أنه من أجل  $n \in N^*$  ،  $|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$  . استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

✓ الحل :

(1) دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0,2]$

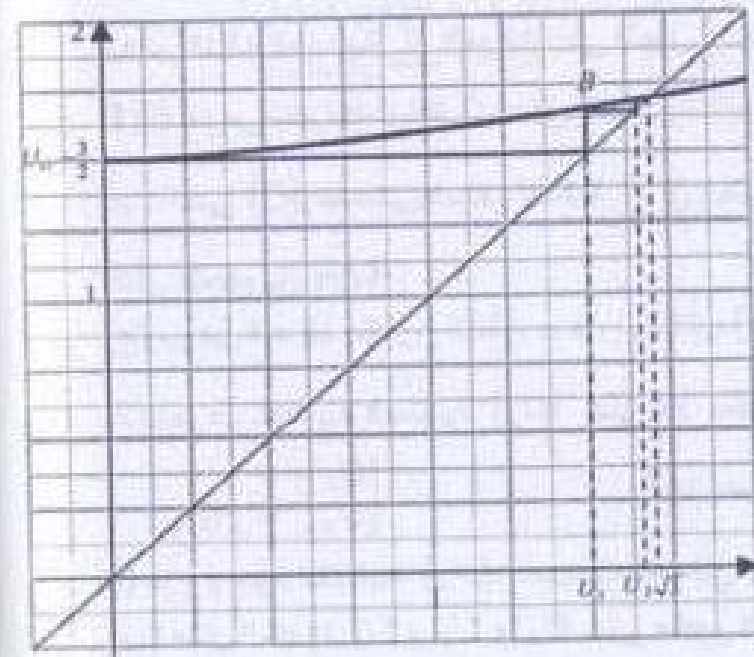
الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0,2]$  ولدينا



$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+3)}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

من أجل كل  $x \in [0, 2]$  ،  
 $f'(x) > 0$  ومنه الدالة  $f$   
 متزايدة تماماً على  $[0, 2]$   
 جدول تغيرات  $f$  ،

(ب) الرسم



(ج) الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $[0, 2]$  وبالتالي  $f(x) \in [f(0), f(2)]$

لكن  $f(2) = \frac{7}{4}$  و  $f(0) = \frac{3}{2}$

إذن  $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$

وبما أن  $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right] \subset [0, 2]$

فإن  $f(x) \in [0, 2]$

(2)

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

(أ) بما أن الدالة  $f$  معرفة على  $I$  و من أجل كل  $x \in I$  ،  $f(x) \in I$  و  $U_0 \in I$

فإننا نستطيع تعريف متتالية  $(U_n)$  بـ  $U_{n+1} = f(U_n)$

$$U_1 = f(U_0) = f(0) = \frac{3}{2}$$

$$U_2 = f(U_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{3}{2} + 3}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{6}{\frac{7}{2}} = \frac{12}{7}$$

(ب) نرسم مستقيم يوازي محور القواسم معادلته  $y = U_0$

هذا المستقيم يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  في النقطة  $A$  إحداثياتها  $(U_0, U_0)$  و من

النقطة  $A$  نرسم مستقيم يوازي محور الزائيب يقطع  $(C_f)$  في  $B$  . إذن إحداثيات  $B$

هي  $(U_0, f(U_0))$  أي  $B(U_0, U_1)$

بنفس الكيفية نعلم  $U_2$

(ج) نلاحظ من التمثيل البياني أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة و متقاربة

(3) (أ) البرهان على أن  $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

- من أجل  $n=0$  لدينا  $u_0=0$  و  $0 \leq 0 \leq \sqrt{3}$  إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$
- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  مع  $n \geq 0$
- و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

بما أن  $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$   $f$  متزايدة تماما على  $[0,2]$  فإن  $f(0) \leq f(U_n) \leq f(\sqrt{3})$  لكن :

$$f(0)=0 \text{ و } f(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\text{إذن } 0 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

و بالتالي الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$

(ب) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي  $U_{n+1} > U_n$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{2U_n+3}{U_n+2} - U_n \\ &= \frac{2U_n+3-U_n^2-2U_n}{U_n+2} \\ &= \frac{-U_n^2+3}{U_n+2} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-U_n)(\sqrt{3}+U_n)}{U_n+2} \end{aligned}$$

بما أن  $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$  فإن  $\sqrt{3}-U_n \geq 0$  و  $\sqrt{3}+U_n \geq 0$  و  $U_n+2 \geq 0$  و عليه يكون  $U_{n+1} - U_n > 0$  و بالتالي  $(U_n)$  متزايدة تماما على  $N$  أي  $U_{n+1} > U_n$

- بما أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ  $\sqrt{3}$  فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي  $l$  (ج)

$$\begin{aligned} U_{n+1} - \sqrt{3} &= \frac{2U_n+3}{U_n+2} - \sqrt{3} \\ &= \frac{2U_n+3-\sqrt{3}U_n-2\sqrt{3}}{U_n+2} \\ &= \frac{2(U_n-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{3}-U_n)}{U_n+2} \\ &= \frac{2(U_n-\sqrt{3})-\sqrt{3}(U_n-\sqrt{3})}{U_n+2} \\ &= \frac{(U_n-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{U_n+2} \end{aligned}$$

$$|U_{n+1} - \sqrt{3}| = \frac{|2-\sqrt{3}| |U_n - \sqrt{3}|}{|U_n+2|}$$

$$2 \leq |U_n+2| \leq |2+\sqrt{3}| \text{ ومنه } 0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$$



و بالقلب،

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \leq \frac{1}{|U_n+2|} \leq \frac{1}{2}$$

$$|U_{n+1}-\sqrt{3}| \leq \frac{|2-\sqrt{3}|}{2} |U_n-\sqrt{3}|$$

$$|U_{n+1}-\sqrt{3}| \leq \left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| |U_n-\sqrt{3}|$$

$$\text{اذن } k = \left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \text{ مع } 0 < k < 1$$

نبرهن على صحة التباينة بالتراجع  
من اجل  $n=1$ ،

$$U_1 - \sqrt{3} = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$$

$$k^1 |0 - \sqrt{3}| = \left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| \sqrt{3}$$

$$= \left|\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right|$$

$$\text{اذن } |U_1 - \sqrt{3}| \leq k^1 |U_0 - \sqrt{3}|$$

و منه الخاصية صحيحة من اجل  $n=1$

- نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل عدد طبيعي كفي  $n$  اي

$$|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$$

و نبرهن ان الخاصية صحيحة من اجل  $n+1$  اي  $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k^{n+1} |U_0 - \sqrt{3}|$   
لدينا،

$$|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k |U_n - \sqrt{3}|$$

$$\leq k \times k^n |U_0 - \sqrt{3}|$$

$$\leq k^{n+1} |U_0 - \sqrt{3}|$$

اذن الخاصية صحيحة من اجل  $n+1$  و بالتالي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$   
فان الخاصية صحيحة

#### التمرين الرابع: ( 4 نقاط)

$n$  عدد طبيعي اكبر من 5.

1)  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيان حيث  $a = n-2$  و  $b = 2n+3$

- (أ) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  ؟  
 (ب) بين أن العددين  $a$  و  $b$  من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان  $n+5$  مضاعف للعدد 7  
 (ج) عين قيم  $n$  التي من أجلها  $PGCD(a,b)=7$   
 (2) نعتبر العددين الطبيعيين  $p$  و  $q$  حيث :  
 $q=n^2-7n+10$  و  $p=2n^2-7n-15$   
 (أ) بين أن كل من العددين  $p$  و  $q$  يقبل القسمة على  $n-5$   
 (ب) عين تبعا لقيم  $n$  و بدلالة  $n$  ،  $PGCD(p,q)$

✓ الحل :

$$(1) \quad a=n-2 \quad \text{و} \quad b=2n+3$$

(أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر  
 نستطيع أن نكتب :

$$\begin{aligned} b &= 2n-4+7 \\ &= 2(n-2)+7 \\ &= 2a+7 \end{aligned}$$

ليكن  $d$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$   
 إذن  $d$  يقسم  $2a$  و  $b$  و منه  $d$  يقسم  $b-2a$  أي  $d$  يقسم 7  
 و عليه فالقيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر هي 1 و 7

(ب) نستطيع أن نكتب :  $b=n-2+n+5$   
 $b=a+n+5$

- إذن إذا كان  $a$  و  $b$  مضاعفين للعدد 7 فإن  $b-a$  مضاعف للعدد 7  
 وبما أن  $b-a=n+5$  فإن  $n+5$  مضاعف للعدد 7

- إذن إذا كان  $n+5$  مضاعف للعدد 7 فإننا نكتب  $n+5=7k$  مع  $k \in \mathbb{N}^*$   
 إذن  $n=7k-5$

نعوض قيمة  $n$  في  $a$  و  $b$  نجد :

$$\begin{aligned} a &= 7k-5-2=7k-7 \\ a &= 7(k-1)=7k' \end{aligned}$$

إذن  $a$  مضاعف لـ 7

$$\begin{aligned} b &= 2n+3 \\ &= 2(7k-5)+3 \\ &= 14k-10+3 \\ &= 14k-7 \\ &= 7(2k-1)=7k'' \end{aligned}$$

إذن  $b$  مضاعف لـ 7

(ج) عين قيم  $n$  بحيث  $PGCD(a,b)=7$

القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  يساوي 7 هذا يعني أن  $a$  و  $b$  من مضاعفات 7

و بالتالي  $n+5$  مضاعف لـ 7 و عليه قيم  $n$  تكون من الشكل  $7k-5$  مع  $k$  عدد طبيعي غير معدوم

$$p = 2n^2 - 7n - 15 \quad (2)$$

$$q = n^2 - 7n + 10$$

(1) نحلل  $p$  إلى جداء عوامل

	$2n^2 - 7n - 15$	$n-5$
بالطرح	$2n^2 - 10n$	$2n+3$
	$3n-15$	
بالطرح	$3n-15$	
	$0$	

$$p = (n-5)(2n+3) \quad \text{إذن}$$

نحلل  $q$  إلى جداء عوامل

	$n^2 - 7n + 10$	$n-5$
بالطرح	$n^2 - 5n$	$n-2$
	$-2n+10$	
بالطرح	$-2n+10$	
	$0$	

$$q = (n-5)(n-2) \quad \text{إذن}$$

إذن  $(n-5)$  تقسم  $p$  و تقسم  $q$

(ب) عين تبعا لقيم  $n$  و بدلالة  $n$  ،  $PGCD(p, q)$

$$PGCD(p, q) = (n-5) \times PGCD(2n+3, n-2) \\ = (n-5) \times PGCD(a, b)$$

- إذا كان  $n+5$  مضاعف للعدد 7 فإن  $PGCD(b, a) = 7$

و عليه،  $PGCD(p, q) = 7(n-5)$

- إذا كان  $n+5$  ليس مضاعف للعدد 7 فإن  $PGCD(b, a) = 1$

$$PGCD(p, q) = 1 \times (n-7) \\ = n-7$$

# مُحَنَّا رَاثُ مَن بكَالو رِبَا أَجْرَ سَنِينِ

تطابق تماما البرنامج الجديد لوزارة التربية

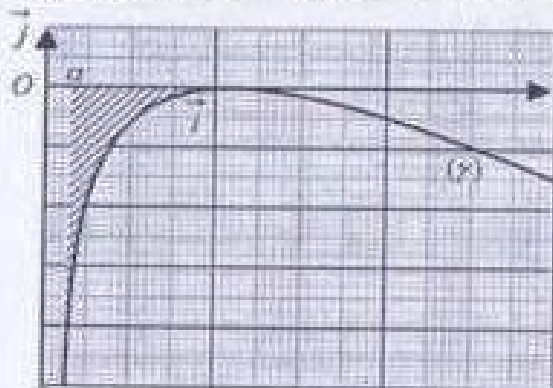
## (بولينيزي - 2004)

### التمرين الأول :

لنحني  $(\gamma)$  المجاور هو التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بـ

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

1-1) برهن أن  $f$  قابلة للاشتقاق وأنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما فإن



إشارة  $f'(x)$

تكون من إشارة  $N(x)$  حيث ،

$$N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x]$$

ب) احسب  $N(1)$  ثم عين إشارة  $N(x)$

(ميز الحالتين  $x > 1$  و  $x < 1$ ).

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على

$]0, +\infty[$  وأحداثيات النقط من  $(\gamma)$

ذات الترتيب العظمى.

2) نسمي  $\mathcal{A}(\alpha)$  المساحة المبر عنها بوحدة المساحة للحيز من المستوى الموضح في الشكل

السابق حيث  $\alpha$  عدد حقيقي من المجال  $]0, 1[$

أ) عبر عن  $\mathcal{A}(\alpha)$  بدلالة  $\alpha$  (يمكنك استعمال التكامل بالتجزئة).

ب) احسب نهاية  $\mathcal{A}(\alpha)$  لما  $\alpha$  يؤول إلى 0 ، ثم اعط تفسيرا لهذه النهاية.

3) نعرف متتالية  $(U_n)$  مع  $n \in \mathbb{N}$  بحددها الأول  $U_0$  من  $[1, 2]$

$$U_{n+1} = \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} + 1 \text{ يكون } n \text{ عدد طبيعي}$$

أ) برهن أنه من أجل كل  $x$  من  $[1, 2]$  يكون لدينا  $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  تكون الحدود  $U_n$  تنتمي إلى  $[1, 2]$ .

4) ملاحظ أن  $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$  عين اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$ .

5- أ) برهن أن المتتالية  $(U_n)$  متقاربة ونرمز بـ  $\ell$  إلى نهايتها.

ب) عين القيمة المضبوطة لـ  $\ell$ .



✓ الحل :

1- (أ) الدالة  $f$  عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  هما :

$$x \mapsto 1-x \quad \text{و} \quad x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad \text{ولدينا على المجال } ]0, +\infty[$$

$$= \frac{2 - \ln x - 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = - \frac{[\ln x + 2(-1+x\sqrt{x})]}{2x\sqrt{x}} = \frac{N(x)}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} - 1$$

لكن  $x\sqrt{x} > 0$  على المجال  $]0, +\infty[$

إذن  $f'(x)$  له نفس إشارة  $N(x)$

(ب) لدينا  $N(1) = 0$

- إذا كان  $x > 1$  فإن  $x\sqrt{x} > 1$  وبالعكس نحصل على  $x\sqrt{x} < 1$  ومنه ينتج

$$x\sqrt{x} - 1 > 0$$

وبالتالي  $2(x\sqrt{x} - 1) > 0$

ولدينا أيضا  $\ln x > 0$

إذن بالتجميع نحصل على  $N(x) > 0$  وعلية يكون  $N(x) < 0$

- بنفس الكيفية نبين أن  $N(x) < 0$  في حالة  $x < 1$

(ج) الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]0, 1[$  ومتناقصة على المجال  $]1, +\infty[$

والدالة  $f$  لها قيمة حدية عظمى من أجل  $x=1$  وهي  $f(1)=0$

إذن الدالة  $f$  سالبة على مجال دراستها.

$$2- (أ) \text{ من نتيجة السؤال السابق نستنتج أن } \mathcal{A}(a) = - \int_a^1 f(x) dx$$

ولحساب  $\mathcal{A}(a)$  نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة

$$\text{نضع } U(x) = 2 \ln x \quad \text{و} \quad V(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ومنه ينتج } U'(x) = \frac{2}{x} \quad \text{و} \quad V'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$U$  و  $V$  دالتان قابلتان للاشتقاق و  $U'$  و  $V'$  مستمرتان.

$$\int_a^1 \frac{2 \ln x}{2\sqrt{x}} dx = \left[ 2(\ln x)\sqrt{x} \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx$$

$$\int_a^1 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = \int_a^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx \quad \text{لكن}$$

$$= 4 \int_a^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \left[ 4\sqrt{x} \right]_a^1$$

إذن

$$\mathcal{A}(a) = \left[ 2(\ln x)\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right]_a^1 = \left( a - \frac{a^2}{a} - 4\sqrt{a} + 2\sqrt{a} \ln a \right) + \frac{7}{2}$$

(ب) نعلم أنه إذا كان  $a > 0$  نستطيع كتابة  $a = \beta^2$  حيث  $\beta > 0$



$$\sqrt{\alpha} \ln(\alpha) = \sqrt{\beta^2} \ln \beta^2 \quad \text{إذن} \\ = 2 \beta \ln \beta$$

فالدالة مربع مستمرة وبالتالي إذا انتهى  $\alpha$  إلى 0 فإن  $\beta$  كذلك ونعلم أيضا

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} 2 \beta \ln \beta = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{C}(a) = \frac{7}{2} \quad \text{إذن}$$

وبكيفية هندسية فإن هذه النهاية موافقة للمساحة المحدودة بالمنحني  $(\gamma)$  ومحور

القواسل والمستقيمات العمودية ذات العادلة  $x=1$  و  $x=0$

3- (1) لدينا  $1 \leq x \leq 2$  ومنه يكون  $\ln 1 \leq \ln x \leq \ln 2$

أي  $0 \leq \ln x \leq \ln 2$  ..... (1)

ولدينا كذلك  $1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$  وبالقالب نجد  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$  ..... (2)

بضرب طرفي المتباينتين (1) و (2) طرفا إلى طرف نجد  $0 \leq \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq \ln(2)$

(ب) من أجل  $n=0$  لدينا  $1 \leq U_0 \leq 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل  $n=0$ .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  أي  $1 \leq U_n \leq 2$

ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ .

بما أن  $1 \leq U_n \leq 2$  ومن السؤال (ا) نستنتج أن  $0 \leq \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} \leq 1$

وبإضافة 1 إلى حدود هذه المتباينة نجد  $1 \leq \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} + 1 \leq 2$  أي  $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}$  يكون  $U_n \in [1, 2]$ .

(4) بما أن  $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$  فإن  $U_{n+1} - U_n = f(U_n)$

وبما أننا برهنا أن  $f$  سالبة فإن  $U_{n+1} - U_n \leq 0$

إذن المتتالية  $(U_n)$  متناقصة.

5- (ا) للمتتالية  $(U_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 1

إذن فهي تكون متقاربة نحو عدد حقيقي  $\ell$  حيث  $1 \leq \ell$

(ب) بما أن الدالة  $f$  مستمرة وقابلة للاشتقاق

فإن العلاقة  $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$  تعطى بالمرور إلى النهاية  $\ell = f(\ell) + \ell$  أي  $f(\ell) = 0$

ولكن من السؤال 1- (ج) وجدنا أن القيمة الوحيدة التي تنعدم عندها  $f$  هي 1

$$\text{إذن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

## التمرين الثاني :

في المستوى الزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  نأخذ  $2\text{Cm}$  كوحدة للرسم.

من أجل كل نقطة  $M$  من المستوى ذات اللاحقة  $Z$  نعتبر النقطتين  $M'$  و  $M''$  دواتا اللاحقتين  $Z' = Z - 2$  و  $Z'' = Z^2$  على الترتيب.

1- (أ) عين النقط  $M$  بحيث  $M''$  منطبقة على  $M$ .

(ب) عين النقط  $M$  بحيث  $M''$  منطبقة على  $M'$ .

(2) برهن أنه يوجد بالضبط نقطتان  $M_1$  و  $M_2$  بحيث صورهما  $M'_1$  و  $M'_2$  و  $M''_1$  و  $M''_2$  تنتمي إلى محور الترتيب. وبين أن لواحقها مترافقة.

(3) نضع  $Z = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.

(أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{Z'' - Z}{Z' - Z}$ .

(ب) استنتج المجموعة  $E$  للنقط  $M$  من المستوى بحيث تكون النقط  $M''$ ،  $M'$ ،  $M$  على استقامة واحدة. مثل  $E$  وماذا تستنتج؟

(4) نضع  $Z = \sqrt{3}e^{i\theta}$  حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

(أ) عين المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$ . وعين كذلك  $(\Gamma')$  و  $(\Gamma'')$  للنقط  $M'$  و  $M''$  المرتبطة لـ  $M$ .

(ب) مثل  $(\Gamma)$  و  $(\Gamma')$  و  $(\Gamma'')$  في الشكل السابق.

(ج) في هذا السؤال نضع  $\theta = \frac{\pi}{6}$ . علم النقطة  $M_3$  الحاصل عليها من أجل هذه القيمة لـ

$\theta$  والنقطتين  $M'_3$  و  $M''_3$  المرتبتين لها. وبين أن المثلث  $M_3M'_3M''_3$  قائم. وهل هو متساوي الساقين؟

✓ الحل :

1- (أ)  $M'$  منطبقة على  $M$  يكافئ  $Z^2 = Z$

$Z(Z - 1) = 0$  يكافئ

يكافئ  $(Z = 0)$  أو  $(Z = 1)$

إذن النقط  $M$  المطلوبة هي البنا  $O$  والنقطة ذات اللاحقة 1.

(ب)  $M''$  منطبقة على  $M$  يكافئ  $Z^2 = Z - 2$

$Z^2 - Z + 2 = 0$  يكافئ

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 = -7$  ومنه  $\Delta = -7$

إذن المعادلة  $Z^2 - Z + 2 = 0$  لها حلان هما  $\frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$  و  $\frac{1 - i\sqrt{7}}{2}$

(2)  $Z'$  تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان  $x + iy - 2$  تخيليا صرفا

ويكون هذا محققا إذا كان  $x = 2$  ..... (1)

$Z''$  تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان  $x^2 - y^2 + 2ixy$  تخيليا صرفا

وهذا يكون محققا إذا كان  $x^2 - y^2 = 0$  ..... (2)

من (1) و (2) نجد  $4 - y^2 = 0$  أي  $(y = 2)$  أو  $(y = -2)$

إذن توجد نقطتان  $M_1(2 + 2i)$  و  $M_2(2 - 2i)$  حيث أن صورتيهما  $M'$  و  $M''$

تنتميان إلى محور الترتيب ولواحقهما مترافقتان.

$$\frac{Z''-Z}{Z'-Z} = \frac{Z^2-Z}{Z-2-Z} \quad (1-3)$$

$$= \frac{x^2-y^2+2ixy-x-iy}{-2}$$

ب) النقط  $M''$ ،  $M'$ ،  $M$  على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان  $\frac{Z''-Z}{Z'-Z}$  حقيقيا أي

$$2xy-y=0 \text{ يكافئ } y(2x-1)=0 \text{ يكافئ } (y=0) \text{ أو } (x=\frac{1}{2})$$

إذن  $E$  هي مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  مع  $Z=x$  أو  $Z=\frac{1}{2}+iy$  حيث  $y$  عدد حقيقي.

4- (أ) المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z=\sqrt{3}e^{i\theta}$  مع  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  هي الربع الأول من الدائرة (في الاتجاه المباشر) ذات المركز  $O$  ونصف القطر  $\sqrt{3}$ .

- المجموعة  $(\Gamma')$  للنقط  $M'$  هي ربع دائرة صورة  $(\Gamma)$  بالإنسحاب الذي شعاعه  $-2\vec{U}$ .

- النقطة  $M''$  ذات اللاحقة  $Z''=Z^2=3e^{2i\theta}$

- المجموعة  $(\Gamma'')$  للنقط  $M''$  هي إذن نصف دائرة (مباشرة) ذات المركز  $O$  وطول نصف القطر 3.

(ج) بوضع  $\theta = \frac{\pi}{6}$  يكون

$$Z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z'_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z''_1 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

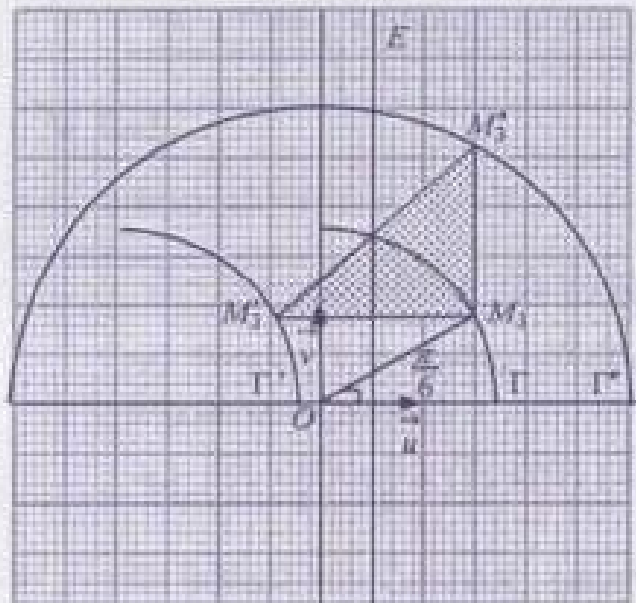
بما أن  $M_1$  و  $M'_1$  لهما نفس الترتيب  
إذن المستقيم  $(M_1M'_1)$  يكون أفقيا.

لدينا  $M_1$  و  $M''_1$  لهما نفس الفاصلة  
إذن المستقيم  $(M_1M''_1)$  يكون عموديا.

والثلاث  $M_1M'_1M''_1$  يكون إذن قائما في  $M_1$ .

$$M_1M'_1{}^2 = 4 \text{ و } M_1M''_1{}^2 = 3 \text{ و } M'_1M''_1{}^2 = 7$$

إذن الثلاث  $M_1M'_1M''_1$  ليس متقايس الساقين.



## التمرين الثاني : (رياضي + تقني رياضي)

الستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  نأخذ الوحدة  $1\text{cm}$  للرسم.  
نرمز بـ  $A$ ،  $B$  و  $C$  إلى النقط ذات اللواحق  $-1+i$ ،  $3+2i$  و  $i\sqrt{2}$  على الترتيب.

(1) نعتبر التحويل النقطي  $f$  من المستوى في نفسه الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $Z$

النقطة  $M' = f(x)$  ذات اللاحقة  $Z'$  حيث  $Z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{Z} + i(1+\sqrt{2}) - 1$

(أ) احسب لاحقة النقطتين  $A' = f(A)$  و  $C' = f(C)$ .

(ب) استنتج طبيعة التحويل  $f$  والعناصر المميزة له.

(ج) علم النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تم أنشئ النقطة  $B' = f(B)$ .

(2- أ) اعط الكتابة المركبة للتعاكس  $h$  ذي المركز  $A$  والنسبة  $\sqrt{2}$ .

(ب) بين أن المركب  $g = f \circ h$  له كتابة مركبة  $Z'' = (1+i)\bar{Z} - 1 + 3i$

(3- أ) لتكن  $M_0$  النقطة ذات اللاحقة  $2-4i$ .

عين لاحقة النقطة  $M'_0 = g(M_0)$  ثم تحقق أن الشعاعين  $\overrightarrow{AM'_0}$  و  $\overrightarrow{AB}$  متعامدان.

(ب) نعتبر نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  ونفرض أن الجزء الحقيقي  $x$  والجزء التخيلي  $y$  عدنان صحيحان.

برهن أن الشعاعين  $\overrightarrow{AM'}$  و  $\overrightarrow{AB}$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $5x+3y=-2$ .

(ج) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $5x+3y=-2$ .

(د) استنتج النقط  $M$  التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال  $[-6, 6]$  بحيث يكون الشعاعان

$\overrightarrow{AM'}$  و  $\overrightarrow{AB}$  متعامدين، ثم علم النقط الحاصل عليها.

✓ الحل :

$$Z_{A'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (-1-i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -1+i = Z_A \quad (1-1)$$

$$Z_{C'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (-i\sqrt{2}) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = i\sqrt{2} = Z_C$$

(ب) التحويل  $f$  له نقطتان صامدتان وبالتالي فهو تناظر محوري محوره المستقيم (AC) (أي تشابه غير مباشر).

$$Z_{B'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (3-2i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = \frac{3}{2} + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \quad (ج)$$

(2- أ) لدينا  $\overrightarrow{AM'} = \sqrt{2} \overrightarrow{AM}$  وهذه المساواة تترجم إلى  $Z' + 1 - i = \sqrt{2}(Z + 1 - i)$

$$\text{ومنه } Z' = \sqrt{2}Z + \sqrt{2} - 1 + i(1 - \sqrt{2})$$

(ب) لدينا  $Z'' = f(h(Z)) = f\left(Z\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1 - \sqrt{2})\right)$

$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left( \bar{Z} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + i(1 + \sqrt{2}) \right) - 1 + i(1 + \sqrt{2}) = (1+i)\bar{Z} - 1 + 3i$$

وهي الكتابة المركبة للتشابه الغير المباشر.

(3- أ) باستعمال المساواة السابقة يكون لدينا  $Z''_0 = (1+i)(2+4i) - 1 + 3i = -3 + 9i$

الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  إحداثياته (4,1) والشعاع  $\overrightarrow{AM'_0}$  إحداثياته (-2,8)

لكن  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM'_0} = -8 + 8 = 0$  ومنه فإن الشعاعين متعامدان.

وعليه فإن النقطة  $M_0''$  تنتمي إلى المستقيم العمودي على  $(AB)$  والذي يشمل  $A$ .  
 ب) لتكن  $M$  نقطة ذات اللاحقة  $Z = x + iy$  مع  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان.  
 لدينا  $Z'' = (1+i)(x-iy) + 3i - 1 = x + y - 1 + i(x - y + 3)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM''} = 0 \text{ يكافئ } 4(x+y) + 1(x-y+2) = 0 \text{ يكافئ } 5x + 3y + 2 = 0$$

ج) الثنائية  $(-1, 1)$  حل خاص للمعادلة  $5x + 3y + 2 = 0$

$$(1) \dots\dots\dots 5x + 3y = -2$$

$$(2) \dots\dots\dots 5(-1) + 3(1) = -2$$

من (1) و (2) ينتج

$$5x + 3y = 5(-1) + 3(1)$$

ومنه ينتج

$$(3) \dots\dots\dots 5(x+1) = 3(1-y)$$

3 يقسم  $5(x+1)$  و 3 أولي مع 5

إذن حسب نظرية غوص 3 يقسم  $x+1$

3 يقسم  $(x+1)$  يعني أنه يوجد

عدد صحيح  $k$  بحيث  $x+1 = 3k$

$$x = 3k - 1$$

نعوض عبارة  $x$  في (3) نجد

$$y = 1 - 5k$$

إذن مجموعة حلول المعادلة

$$5x + 3y = -2 \text{ هي مجموعة}$$

الثنائيات  $(-1 + 3k, 1 - 5k)$  مع  $k \in \mathbb{Z}$

د) لدينا  $-6 \leq y \leq 6$

$$\text{يكافئ } -6 \leq 1 - 5k \leq 6 \text{ يكافئ } -1 \leq k \leq \frac{7}{5}$$

وبما أن  $k$  عدد صحيح فإن  $k$  يأخذ القيم  $-1, 0, 1$  ومن أجل هذه القيم فإن

إحداثيات النقط المحصل عليها هي  $(-4, 6), (-1, 1), (2, -4)$

النقط  $M''$  للواقفة إحداثياتها هي  $(-3, 9), (-1, 1), (1, -7)$ .

الثنائية  $(-1, 1)$  توافق النقطة  $A$  فهي مرفوضة. إذن يبقى لنا حلان فقط للنقطة  $M$ .

### التمرين الثالث:

$A, B, C$  ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من المستوي. وليكن  $U$  كيسا يحتوي على

6 وريقات لا نستطيع التمييز بينها عند اللمس وتحمل الأرقام  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ .

وليكن أيضا  $V$  كيسا آخر يحتوي على 5 وريقات لا نميز بينها عند اللمس بحيث 4

وريقات تحمل الرقم 1 و وريقة تحمل الرقم  $-1$ .

نسحب عشوائيا وريقة من كل كيس، ونفرض أن كل السحبات متساوية الاحتمال.

ليكن  $a$  الرقم المقروء على الوريقة المسحوبة من الكيس  $U$  وليكن أيضا  $b$  الرقم المقروء

على الوريقة المسخوية من الكيس  $V$ .

(1) بين ان الجملة  $\{(C, 4), (B, b), (A, a)\}$  تقبل مرجحا وليكن  $G$

(2- ا) عين احتمال كل من الأحداث التالية ،

$E_1: G$  ينتمي إلى المستقيم  $(BC)$  و  $E_2: G$  ينتمي إلى القطعة  $[BC]$

(ب) بين احتمال الحدث  $E_2: G$  موجود داخل المثلث  $ABC$  ولا تنتمي إلى أي ضلع

يساوي  $\frac{2}{5}$  . (اعتمادا على اعتبارات الإشارة)

(3) ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير معدوم، نكرر التجربة  $n$  مرة وفي نفس الشروط والتي

تتعمل في سحب وريقة من كتلا كيسي  $U$  و  $V$  . ولنعتبر المرحج  $G$  الموجود في السؤال 1

وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي قيمه عدد مرات تحقق الحادث  $E_2$  .

(ا) عين العدد  $n$  بحيث يكون الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  يساوي إلى 4 .

(ب) عين القيمة الصغرى  $L$  بحيث احتمال التحصل على الأقل على مرجح من الراجح

موجود داخل المثلث  $ABC$  يكون أكبر من أو يساوي 0,999 .

✓ الحل :

(1) أصغر قيمة لجموع  $a+b$  هو -3 أي  $a+b > -4$  وهذا يعني أن  $a+b+4 > 0$

وهذا يعني أن مجموع العوامل غير معدوم وبالتالي المرحج  $G$  موجود مهما كان السحب

(2- ا)  $G$  ينتمي إلى المستقيم  $(BC)$  إذا وفقط إذا كان معامل  $A$  معدوما أي  $a=0$

$$\text{إذن } P(E_1) = \frac{1}{6}$$

$G$  تنتمي إلى القطعة  $[BC]$  إذا وفقط إذا كان  $a=0$  و  $b > 0$

$$\text{لدينا إذن } P(E_2) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$$

(ب) لا يكون  $G$  موجود تماما داخل المثلث إلا إذا كانت العوامل الثلاث أكبر من الصفر.

$$\text{أي إلا إذا كانت } a > 0 \text{ و } b > 0 \text{ وعليه } P(E_2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$(3- ا) \text{ نعلم أن } E(X) = P_2 = \frac{2}{5} \times n$$

$$E(x) = 4 \text{ يعني أن } \frac{2}{5} \times n = 4 \text{ أي أن } n = 10$$

(ب) احتمال عدم التحصل على مرجح داخل المثلث  $ABC$  هو  $\left(\frac{3}{5}\right)^n$

إذن احتمال التحصل على الأقل على مرجح موجود داخل المثلث هو  $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$

$$\text{و بالتالي يجب أن يكون } 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \geq 0,999 \text{ وهذا يكافئ } \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,001$$

$$\text{وهذا يكافئ } n \ln\left(\frac{3}{5}\right) \leq \ln(0,001) \text{ أي } n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$$

إذن يجب تكرار التجربة 14 مرة .



## (أمريكا الجنوبية - 2004)

### التمرين الأول :

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  بـ  $f(x) = xe^{-x}$  ونرمز بـ  $(\Gamma)$  إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الرسم هي  $10\text{ cm}$ .

I-1- أ) عين نهاية  $f$  عند  $+\infty$

ب) ادرس اتجاه تغير  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها

ج) ارسم  $(\Gamma)$  في المعلم  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $m$  من  $0, \frac{1}{e}[$  فإن المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلين

ب) في حالة  $m = \frac{1}{4}$  نسمي  $\alpha$  و  $\beta$  بحلي المعادلة  $f(x) = m$  مع  $\alpha < \beta$  عين حصرا بسعة  $10^{-2}$  للحل  $\alpha$

ج) حل المعادلة  $f(x) = m$  في حالة  $m = 0$  و  $m = \frac{1}{e}$

II-1- نعتبر المتتالية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n} \end{cases} \text{ حيث } \alpha \text{ هو الحل الموجود في الفرع I-1-}$$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون لدينا  $U_n > 0$

ب) هل المتتالية  $(U_n)$  متناقصة ؟

ج) هل المتتالية  $(U_n)$  متقاربة ؟ في حالة نعم عين نهايتها.

2) نعتبر المتتالية  $(W_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $W_n = \ln(U_n)$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $U_n = W_n - W_{n+1}$

ب) نضع  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

برهن أن  $S_n = W_0 - W_{n+1}$

ج) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

3) نعتبر المتتالية  $(V_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحددها الأول  $V_0$  حيث  $V_0 > 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $V_{n+1} = V_n e^{-V_n}$

هل توجد قيمة  $V_0$  تختلف عن  $\alpha$  بحيث من أجل كل  $n \geq 1$  يكون  $U_n = V_n$  ؟

في حالة نعم عينها .

✓ الحل :

I - 1 - ا) من أجل كل  $x$  لدينا  $f(x) = \frac{x}{e^x}$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ب) الدالة  $f$  عبارة عن جداء دالتين قابلتين للاشتقاق إذن فهي قابلة للاشتقاق و :

من أجل كل  $x$  لدينا  $f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x}$

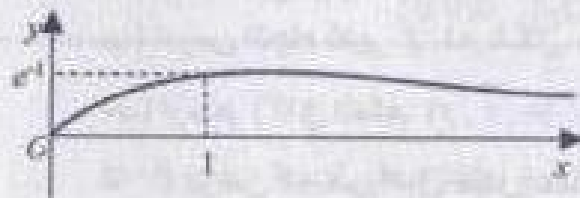
بما أنه من أجل كل  $x$  لدينا  $e^{-x} > 0$  فإن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $(1-x)$

- إذا كان  $x \in [1, +\infty[$  فإن  $f'(x) \leq 0$

- إذا كان  $x \in [0, 1]$  فإن  $f'(x) \geq 0$

إذن  $f$  متناقصة على  $[1, +\infty[$  ومتزايدة على المجال  $[0, 1]$  وعليه جدول تغيرات  $f$  هو :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0



ج) التمثيل البياني للدالة  $f$  (السلم  $\frac{1}{2}$ )

2 - ا) الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما على  $[0, 1]$  و  $f(0) = 0$  و  $f(1) = \frac{1}{e}$

إذن من أجل كل  $m$  من  $[0, \frac{1}{e}]$  فإن المعادلة  $f(x) = m$  لها حل وحيد على المجال  $[0, 1]$

- الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على  $[1, +\infty[$  و  $f(1) = \frac{1}{e}$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن  $m \in ]0, \frac{1}{e}[$

إذن المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا على  $[1, +\infty[$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل  $m$  من  $]0, \frac{1}{e}[$  فإن المعادلة  $f(x) = m$  لها حلان .

هندسيا حلول المعادلة  $f(x) = m$  هما قواصل نقط تقاطع  $(\Gamma)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = m$

ب) من أجل  $m = \frac{1}{4}$  فإن الحل  $\alpha$  ينتمي إلى المجال  $[0, 1]$  وبسهولة نجد أن  $\alpha \approx 0,357$

إذن  $\alpha \in ]0,35, 0,36[$

ج) بنفس الطريقة نجد من أجل  $m = 0$  فالمعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x = 0$  ومن

أجل  $m = \frac{1}{e}$  فالمعادلة تقبل حلا وحيدا  $x = 1$  .

II - 1 - ا) من الفرضية لدينا  $U_0 > 0$

$p$  عدد طبيعي كفي

نفرض ان  $U_0 > 0$  وبما ان  $e^{-x} > 0$  فإن  $U_{p+1} > 0$  ومنه نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  $U_n > 0$   
(ب) بما انه من اجل كل  $n$  لدينا  $U_n > 0$  نقارب بين  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  والواحد .

$$\text{لدينا } \frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-U_n}$$

بما ان  $U_n > 0$  فإن  $e^{-U_n} < 1$  إذن  $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$  وعليه فالمتتالية  $(U_n)$  متناقصة تماما.

(ج) بما ان  $(U_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$  حيث ان  $l$  حل للمعادلة  $l = l e^{-l}$

$$l = l e^{-l} \text{ تكافئ } l(1 - e^{-l}) = 0 \text{ تكافئ } l = 0 \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$W_n - W_{n+1} = \ln(U_n) - \ln(U_{n+1}) \quad (1-2)$$

$$= \ln\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-U_n}}\right) = U_n$$

$$S_n = (W_0 - W_1) + (W_1 - W_2) + \dots + (W_n - W_{n+1}) \quad (ب)$$

$$S_n = W_0 - W_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = -\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$(3) \text{ لدينا } U_1 = U_0 e^{-U_0} \text{ ومنه } U_1 \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$$

ومن السؤال I - 2 (1) نعلم انه توجد قيمة ثانية  $\beta$  بحيث  $\beta e^{-\beta} = U_1$

إذن لدينا  $V_0 = \beta$  و  $V_1 = U_1$  وبصفة عامة  $U_n = V_n$

## التمرين الثاني :

مثلنا في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  كما في الشكل المجاور

المنحنى البياني للدالة  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

حلا للمعادلة التفاضلية  $y' + y = 0$  ..... (E) و  $f(0) = e$

(1) عين  $f(x)$  من اجل كل عدد حقيقي  $x$

(2) ليكن  $t$  عدد حقيقي معطى من المجال  $[1, e]$

حلا في  $\mathbb{R}$  للمعادلة  $e^{1-x} = t$  ذات المجهول  $x$ .

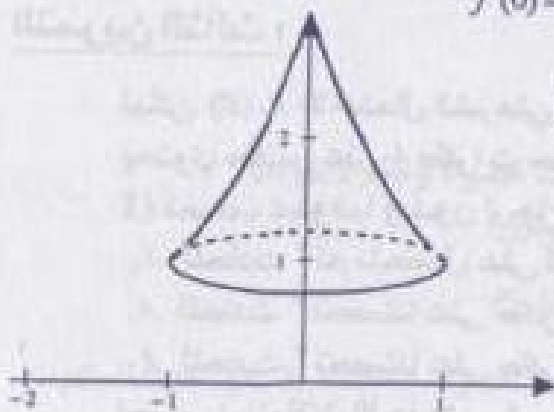
(3) لتكن A النقطة ذات الفاصلة 0

و B نقطة ذات الفاصلة 1 من المنحنى .

نعتبر الجسم المحصل عليه بالدوران حول

محور الزايب للقوس AB

كما في الشكل المجاور



ونسمي  $V$  حجمه، نقبل أن  $V = \pi \int_0^1 (1 - \ln t)^2 dt$   
احسب  $V$  باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين.

✓ الحل :

(1) الحلول العامة للمعادلة التفاضلية  $y' + y = 0$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$x \mapsto k e^{-x}$  مع  $k$  عدد حقيقي كفي.

صورة الصفر هي  $k e^0 = e$  إذن  $k = e$

إذن الدالة  $f$  المطلوب إيجادها هي  $f(x) = e e^{-x}$  أي  $f(x) = e^{1-x}$

(2)  $e^{1-x} = t$  يكافئ  $1-x = \ln t$  يكافئ  $x = 1 - \ln t$

(3) لتكن  $U$  و  $V$  الدالتان المعرفتان على  $[1, e]$  على التوالي بالعبارتين :

$U(t) = (1 - \ln t)^2$  و  $V(t) = t$  هاتان الدالتان قابلتان للاشتقاق ومشتقتهما  $U'$  و  $V'$

معرفتان على التوالي  $U'(t) = -\frac{2}{t}(1 - \ln t)$  و  $V'(t) = 1$  مستمرتين على المجال  $[1, e]$

بتطبيق دستور الكاملة بالتجزئة نجد  $V = \pi \left[ t(1 - \ln t)^2 \right]_1^e + 2 \int_1^e (1 - \ln t) dt$

- نحسب  $\int_1^e (1 - \ln t) dt$  باستعمال دستور الكاملة بالتجزئة :

نضع  $U(t) = 1 - \ln t$  و  $V(t) = t$

هاتان الدالتان قابلتان للاشتقاق على  $[1, e]$  ومشتقتهما  $U'$  و  $V'$  مستمرتان على  $[1, e]$

حيث  $U'(t) = -\frac{1}{t}$  و  $V'(t) = 1$

إذن  $\int_1^e (1 - \ln t) dt = \left[ t(1 - \ln t) \right]_1^e + \int_1^e dt = -1 + e - 1 = e - 2$

وبالتالي يكون  $V = \pi(-1 + 2(e - 2)) = \pi(2e - 5)$

### التمرين الثالث :

ليكن  $P_i(B)$  الاحتمال الشرطي للحدث  $B$  علما أن الحدث  $A$  محقق.

يحتوي كيس على 4 كرات حمراء وكرتين سوداويتين لا نفرق بينهما عند اللمس.

(1) نسحب عشوائيا وبدون إرجاع كرتين من الكيس. نرمز بـ

$A_0$  للحدث "لم نتحصل على أي كرة سوداء"

$A_1$  للحدث "تحصلنا على كرة سوداء واحدة"

$A_2$  للحدث "تحصلنا على كرتين سوداويتين"

احسب احتمالات الأحداث  $A_0$ ،  $A_1$  و  $A_2$

(2) بعد هذا السحب تبقى في الكيس 4 كرات .

نقوم من جديد بسحب عشوائي وبدون ارجاع للكرتين نرسم بـ

"  $B_0$  للحدث " لم نتحصل على أي كرة سوداء في السحب الثاني "

"  $B_1$  للحدث " تحصلنا على كرة سوداء وحيدة في السحب الثاني "

"  $B_2$  للحدث " تحصلنا على كرتين سوداويتين في السحب الثاني "

(أ) احسب  $P_{A_0}(B_0)$  ،  $P_{A_1}(B_0)$  و  $P_{A_2}(B_0)$

(ب) استنتج  $P(B_0)$

(ج) احسب  $P(B_1)$  و  $P(B_2)$

(د) تحصلنا على كرة سوداء وحيدة خلال السحب الثاني .

ما هو احتمال تحصلنا على كرة سوداء وحيدة خلال السحب الأول ؟

(3) نعتبر الحدث  $R$  " وجب علينا بالتحديد القيام بالسحبين لكي نتحصل على كرتين سوداويتين من الكيس " بين أن  $P(R) = \frac{1}{3}$

✓ الحل :

(1) بما أن الكيس يحتوي 6 كرات ونقوم بسحب كرتين فإن عدد الحالات الممكنة هو  $C_6^2$

- لتحقيق الحدث  $A_0$  يجب سحب كرتين حمراويتين من بين 4

إذن عدد الحالات الملائمة هو  $C_4^2$  ونستنتج أن  $P(A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}$

- لتحقيق الحدث  $A_1$  يجب سحب كرة حمراء من بين 4 و كرة سوداء من بين 2

إذن عدد الحالات الملائمة هو  $C_4^1 \times C_2^1 = 8$  وبالتالي  $P(A_1) = \frac{4 \times 2}{C_6^2} = \frac{8}{15}$

لتحقيق الحدث  $A_2$  يجب سحب كرتين سوداويتين من بين 2

إذن عدد الحالات الملائمة هو 1 ونستنتج أن  $P(A_2) = \frac{1}{C_6^2} = \frac{1}{15}$

(2- أ) تبقى في الكيس 4 كرات ونقوم بسحب اثنتين وعدد الحالات الممكنة إذن هو  $C_4^2$

-  $A_0$  محقق، تبقى إذن في الكيس 2 كرات حمراء و 2 كرات سوداء .

لتحقيق الحدث  $B_0$  يكفي سحب كرتين حمراويتين .

إذن هناك حالة ملائمة وحيدة .

ومنه  $P_{A_0}(B_0) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$

- الحدث  $A_1$  محقق، إذن تبقى في الكيس 3 كرات حمراء و كرة سوداء .

لتحقيق الحدث  $B_0$  يكفي سحب كرتين حمراويتين .

إذن هناك  $C_3^2$  حالة ملائمة ومنه  $P_{A_1}(B_0) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}$

- الحدث  $A_2$  محقق، إذن تبقى في الكيس 4 كرات حمراء، الحدث  $B_0$  هو حدث أكيد

إذن  $P_{A_2}(B_0) = 1$

ب) الحادث  $B_0$  هو اتحاد الأحداث الغير متلائمة  $A_2 \cap B_0, A_1 \cap B_0, A_0 \cap B_0$  وعليه  $P(B_0)$  هو مجموع احتمالات هذه الأحداث الثلاثة ،

$$P(A_0 \cap B_0) = P_{A_0}(B_0) \times P(A_0) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(A_1 \cap B_0) = P_{A_1}(B_0) \times P(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}$$

$$P(A_2 \cap B_0) = P_{A_2}(B_0) \times P(A_2) = \frac{1}{15} \quad \text{وعليه} \quad P(B_0) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

ج) بحسابات مماثلة لـ (ب) نجد :

$$P(A_0 \cap B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \quad \text{وعليه} \quad P_{A_0}(B_1) = \frac{2 \times 2}{C_1^1} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15} \quad \text{وعليه} \quad P_{A_1}(B_1) = \frac{1 \times 3}{C_1^1} = \frac{1}{2}$$

سحب كرة سوداء في السحب الثاني بعدما سحبنا كرتين سوداويتين في السحب الأول هو حدث مستحيل إذن  $P_{A_2}(B_1) = 0$

وعليه قيمة  $P(B_1)$  هي مجموع احتمالات الأحداث السابقة أي

$$P(B_1) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + 0 = \frac{8}{15}$$

$$P_{A_0}(B_2) = \frac{1}{C_2^1} = \frac{1}{6}$$

$$\text{إذن} \quad P(A_0 \cap B_2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15} \quad \text{ولدينا أيضا} \quad P_{A_1}(B_2) = 0 \quad \text{و} \quad P_{A_2}(B_2) = 0$$

لكن  $P(B_2)$  هو مجموع احتمالات الأحداث السابقة إذن  $P(B_2) = \frac{1}{15}$ .

3) - الحادث  $R$  محقق إذا تحقق أحد هذين الحادتين غير المتلائمتين :

- " سحب كرة سوداء في السحب الأول وكرة سوداء في السحب الثاني " أي الحادث  $A_1 \cap B_1$

- الحادث " لا تسحب أي كرة سوداء في السحب الأول وتسحب كرتين سوداويتين في السحب الثاني "

أي الحادث  $A_0 \cap B_2$

$$\text{ومنه} \quad P(R) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_0 \cap B_2) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$$

## التمرين الرابع :

I - المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  وحدة الرسم هي 1 cm.

لتكن  $P$  نقطة ذات اللاحقة  $p$  حيث  $p=10$  و  $(\Gamma)$  الدائرة ذات القطر  $[OP]$  نسعي  $\Omega$  مركز  $(\Gamma)$ .



لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط لواحقتها على الترتيب  $a, b, c$

حيث  $a = 5 + 5i$  ،  $b = 1 + 3i$  و  $c = 8 - 4i$

(1) بين أن  $A$  و  $B$  و  $C$  تنتمي إلى الدائرة  $(T)$ .

(2) لتكن  $D$  نقطة ذات اللاحقة  $2 + 2i$  بين أن  $D$  هي السقط العمودي لـ  $O$  على المستقيم  $(BC)$ .

**II** - من أجل كل نقطة  $M$  من المستوى مختلفة عن  $O$  ذات اللاحقة  $Z$  نرفق النقطة  $M'$

ذات اللاحقة  $Z'$  حيث  $Z' = \frac{20}{Z}$  و  $\bar{Z}$  مرافق  $Z$

(1) بين أن النقط  $M', M, O$  على استقامة واحدة

(2) ليكن  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة  $x = 2$  و  $M$  نقطة من  $(\Delta)$  ذات اللاحقة  $Z$

(أ) تحقق أن  $Z + \bar{Z} = 4$

(ب) عبر عن  $Z' + \bar{Z}'$  بدلالة  $Z$  و  $\bar{Z}$  ثم استنتج أن  $5(Z' + \bar{Z}') = Z' \bar{Z}'$

(ج) استنتج أن  $M'$  تنتمي إلى تقاطع  $(OM)$  والدائرة  $(T)$ ، ثم علم النقطة  $M'$  في الشكل.

✓ **الحل :**

**I - (1)** الأشعة  $\vec{OA}$ ،  $\vec{OB}$  و  $\vec{OC}$  إحداثياتها على التوالي  $(5, 5)$ ،  $(1, 3)$  و  $(8, -4)$ .

الأشعة  $\vec{PA}$ ،  $\vec{PB}$ ،  $\vec{PC}$  إحداثياتها على التوالي  $(-5, 5)$ ،  $(-9, 3)$ ،  $(-2, -4)$

لدينا  $\vec{OA} \cdot \vec{PA} = 0$  ومنه  $A \in (T)$

لدينا  $\vec{OB} \cdot \vec{PB} = 0$  ومنه  $B \in (T)$

لدينا  $\vec{OC} \cdot \vec{PC} = 0$  ومنه  $C \in (T)$

(2) - نبرهن أن  $D \in (BC)$  ومن أجل ذلك نبين أن الشعاعين  $\vec{DB}$  و  $\vec{BC}$  مرتبطان خطياً.

$\vec{DB}$  إحداثياته  $(-1, 1)$  و  $\vec{BC}$  إحداثياته  $(7, -7)$  إذن  $\vec{BC} = -7\vec{DB}$

- نبرهن أن  $(OD) \perp (BC)$  ومن أجل ذلك نبين أن  $\vec{OD} \cdot \vec{BC} = 0$

$\vec{OD}$  إحداثياته  $(2, 2)$  و  $\vec{BC}$  إحداثياته  $(7, -7)$  إذن  $\vec{OD} \cdot \vec{BC} = 0$

نستنتج أن  $D$  هي السقط العمودي للنقطة  $O$  على  $(BC)$ .

**II - (1)** لدينا  $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = \arg\left(\frac{20}{Z\bar{Z}}\right)$  لكن  $Z\bar{Z}$  حقيقي موجب

إذن  $\arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) = 0 + 2k\pi$

إذن النقط  $M', M, O$  تقع على استقامة واحدة

(2) - أ) بما أن  $M \in (\Delta)$  إذن للاحقتها  $Z$  هي من الشكل  $2 + iy$  حيث  $y$  عدد حقيقي كافي



نستطيع التحقق أن  $A_0 B_i = \frac{1}{2} A_0 B_{i-1}$

وأن  $\left( \overrightarrow{A_0 B_{i-1}}, \overrightarrow{A_0 B_i} \right) = \frac{3\pi}{4}$  مع  $4 \geq i \geq 1$

نعلم أن صورة مثلث بالتشابه هو مثلث يشابهه.

لدينا  $A_0 = S(A_0)$  و  $B_{n+1} = S(B_n)$  و  $B_{n+2} = S(B_{n+1})$

إذن المثلث  $A_0 B_{n+1} B_{n+2}$  هو صورة المثلث  $A_0 B_n B_{n+1}$  بالتشابه  $S$ . وهذا يعني أن المثلثين متشابهان.

$$L_{n+1} = B_{n+1} B_{n+2} = S(B_n) S(B_{n+1}) \quad (3-1)$$

ومنه  $L_{n+1} = \frac{1}{2} L_n$  وهذا يعني أن المتتالية  $(L_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

(ب) لدينا  $L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n L_0$

$$\Sigma_n = L_0 \times \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1}{\frac{1}{2}}$$

$$\Sigma_n = 2 L_0 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Sigma_n = 2 L_0$$

(4-1) بما أن 3 و 4 أوليان فيما بينهما

فإنه توجد ثنائية صحيحة  $(u, v)$  بحيث  $3u - 4v = 2$

الثنائية  $(2, 1)$  تعتبر حلا خاصا لهذه الأخيرة.

$$(1) \dots 3x - 4y = 2$$

$$(2) \dots 3 \times 2 - 4 \times 1 = 2$$

بطرح (2) من (1) نجد :  $(3) \dots 3(x-2) = 4(y-1)$

3 يقسم  $4(y-1)$  ومنه 3 يقسم  $y-1$  لأن 3 أولي مع 4 .

إذن  $y-1 = 3t$  أي  $y = 3t+1$  ومنه نجد  $x = 4t+2$  .

إذن حلول المعادلة  $3x - 4y = 2$  هي من الشكل  $(4t+2, 3t+1)$  مع  $t \in \mathbb{Z}$

(ب) لدينا  $B_n = S^n(B_0)$  ومنه نستنتج أن  $\left( \overrightarrow{A_0 B_0}, \overrightarrow{A_0 B_n} \right) = n \times \frac{3\pi}{4}$  مع  $n \in \mathbb{Z}$

لكي تنتمي النقطة  $B_n$  إلى  $(\Delta)$  يلزم ويكفي أن يكون  $n \times \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  مع  $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$

ومنه نستنتج أن  $(n, k)$  حولا للمعادلة  $3n - 4k = 2$

ومن السؤال أ) نستنتج أن  $n$  من الشكل  $2+4t$  مع  $t \in \mathbb{Z}$

إذن الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث  $B_n \in (\Delta)$  هي من الشكل  $2+4t$  مع  $t \in \mathbb{N}$  .

## (فرنسا - 2005)

### التمرين الأول :

**I** - لتكن  $f$  دالة معرفة على  $[0, +\infty[$  بـ  $f(x) = (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$  ونسمي  $(\gamma)$  منحناها

البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الرسم هي 1 Cm

- (1) ادرس نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها
- (3) تحقق أن للمعادلة  $f(x) = 10$  تقبل حلا وحيدا موجبا تماما  $\alpha$  في المجال  $[0, +\infty[$
- ثم اعط قيمة مقربة إلى  $10^{-3}$  للعدد  $\alpha$ .
- (4) ارسم  $(\gamma)$

(5) احسب التكامل  $I = \int_0^3 f(x) dx$

**II** - نرمز  $y(t)$  القيمة بالدرجات لحرارة تفاعل كيميائي في اللحظة  $t$  و  $t$  معبر عنه بالساعات،

القيمة الابتدائية في اللحظة  $t=0$  هي  $y(0) = 10$

نقبل أن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي  $t$  من المجال  $[0, +\infty[$  العدد  $y(t)$  هي حل

للمعادلة التفاضلية  $(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$

(1) تحقق أن الدالة  $f$  المدروسة في الجزء (I) هي حل للمعادلة التفاضلية  $(E)$  على المجال  $[0, +\infty[$

(2) نريد إثبات أن الدالة  $f$  هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية  $(E)$  التي تأخذ القيمة 10 في اللحظة  $t=0$

(أ) نسمي  $g$  الحل الكيفي للمعادلة التفاضلية  $(E)$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  وتحقق  $g(0) = 10$

برهن أن الدالة  $g - f$  هي حل على المجال  $[0, +\infty[$  للمعادلة التفاضلية

$(E') : y' + \frac{1}{2}y = 0$

(ب) حل المعادلة التفاضلية  $(E')$

(ج) ماذا تستنتج من الأسئلة السابقة ؟

(3) ما هي المدة الزمنية اللازمة حتى تنزل حرارة التفاعل الكيميائي إلى قيمتها الابتدائية



( النتيجة تدور إلى الثانية ) .

4) القيمة  $\theta$  بالدرجات للحرارة المتوسطة لهذا التفاعل الكيميائي خلال الثلاث ساعات الأولى هي القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[0, 3]$  .  
احسب القيمة بالضبط للعدد  $\theta$  ثم اعط قيمة تقريبية لـ  $\theta$  مقربة إلى 1 درجة .

✓ الحل :

I - 1) بوضع  $X = \frac{x}{2}$  يكون لدينا

$$f(x) = (40X + 10)e^{-x} = 40 \frac{X}{e^X} + \frac{10}{e^X}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{10}{e^X} = 0$  و  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)} = 0$

2) الدالة قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$  ولدينا  $f'(x) = (20 - 10x - 5)e^{-\frac{x}{2}}$

وبالتبسيط نجد  $f'(x) = (15 - 10x)e^{-\frac{x}{2}}$

إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $(15 - 10x)$  لأن  $e^{-\frac{x}{2}} > 0$  .

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x = \frac{3}{2}$$

- إذا كان  $x > \frac{3}{2}$  فإن  $f'(x) < 0$  ومنه  $f$  متناقصة تماما على  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

إذا كان  $0 < x < \frac{3}{2}$  فإن  $f'(x) > 0$  ومنه  $f$  متزايدة تماما على  $\left]0, \frac{3}{2}\right]$

إليك جدول تغيرات  $f$  على  $[0, +\infty[$

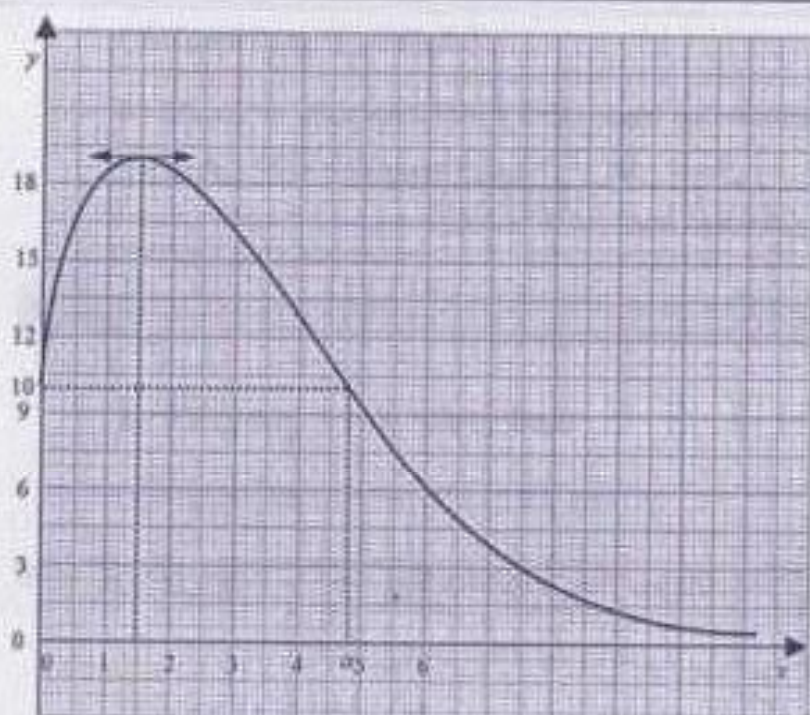
$x$	0	$\frac{3}{2}$	$\alpha$	$+\infty$
$f'$	+	0	-	-
$f$	10	$40e^{-\frac{3}{4}}$	10	0

3) على المجال  $\left]0, \frac{3}{2}\right]$  لدينا  $f(x) > 10$

إذن المعادلة  $f(x) = 10$  ليس لها حلول على المجال  $\left]0, \frac{3}{2}\right]$

- على المجال  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$  الدالة  $f$  مستمرة ( لأنها قابلة للاشتقاق )

ومتناقصة تماما من  $10e^{-\frac{3}{4}} \approx 189$  إلى الصفر .



إذن يوجد عدد حقيقي

وحيد  $\alpha$  من  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

بحيث  $f(\alpha) = 0$

آلة الحاسبة تعطينا

$$\alpha \approx 4.673$$

(4) الرسم

(5) نحسب  $I$  باستعمال

دستور التكامل بالتجزئة ،

$$\begin{cases} U(x) = 20x + 10 \\ V(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases} \text{ نضع}$$

$$\begin{cases} U'(x) = 20 \\ V'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \end{cases} \text{ ومنه نجد}$$

$$I = \int_0^3 U(x) V'(x) dx \text{ وبالتالي}$$

$$I = \left[ -2(20x + 10)e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^3 + \int_0^3 40e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \left[ -2(20x + 10)e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^3 - \left[ 80e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^3 = \left[ -40x - 100e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^3 = 100 - 220e^{-\frac{3}{2}} \approx 50.91$$

$$f(t) + \frac{1}{2}f'(t) = (15 - 10t)e^{-\frac{t}{2}} + (10t + 5)e^{-\frac{t}{2}} = 20e^{-\frac{t}{2}} \text{ لدينا (I - II)}$$

إذن  $f$  هي حل للمعادلة  $(E)$  على المجال  $[0, +\infty[$ .

$$2- (I) \text{ لدينا من الفرض } g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = 20e^{-\frac{t}{2}} \text{ و } g(0) = 10$$

$$\text{ولقد رأينا أن } f(t) + \frac{1}{2}f'(t) = 20e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\text{ب طرح هاتين المعادلتين نجد } g' - f' + \frac{g}{2} - \frac{f}{2} = 0 \text{ وهذا يعني أن } (g - f) + \frac{1}{2}(g - f) = 0$$

$$\text{إذن نستنتج أن الدالة } g - f \text{ حل للمعادلة } (E^*) : y' + \frac{1}{2}y = 0 \text{ على المجال } [0, +\infty[$$

(ب) حلول المعادلة  $(E^*)$  هي الدوال من الشكل  $t \mapsto k e^{-\frac{t}{2}}$  مع  $k$  عدد حقيقي

(ج) الدالة  $g - f$  هي أحد حلول المعادلة  $(E^*)$  لكن  $(g - f)(0) = g(0) - f(0) = k$

ومن جهة أخرى  $(g - f)(0) = 10 - 10 = 0$  إذن  $k = 0$

وبالتالي الدالة  $g - f$  معدومة.

إذن المعادلة  $(E)$  لها حل وحيد يحقق  $y(0) = 10$  وهي الدالة  $f$  المعرفة في I-1

(3) من السؤال I-3 نستنتج أن المدة توافق القيمة  $\alpha$  بحيث  $f(\alpha) = 10$



$$\alpha \approx 4,673 h \approx 4 h 41 \text{ min} \quad \text{إذن}$$

$$\theta = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x) dx = \frac{100-220e^{-\frac{1}{3}}}{3} \quad (4) \quad \text{إذن } \theta \approx 17 \text{ درجة.}$$

## التمرين الثاني :

لكل سؤال تعطى له أربعة أجوبة واحد منها صحيح.

على المرشح أن يضع رقم السؤال والحرف الموافق للجواب المختار مع تبرير الاختيار

(1) ليكن  $Z$  عدد مركب طويلته  $\sqrt{2}$  وعمدته  $\frac{\pi}{3}$  لدينا إذن :

$$A : Z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$$

$$B : Z^{14} = 64 - 64i$$

$$C : Z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$$

$$D : Z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$$

(2) نعتبر في المستوى المركب النسوب إلى معلم متعامد ومتجانس النقطة  $S$  ذات اللاحقة

3

والنقطة  $T$  ذات اللاحقة  $4i$  ولتكن  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $Z$  بحيث :

$$|Z-3| = |3-4i|$$

$(E) : A$  هي محور القطعة المستقيمة  $[ST]$

$(E) : B$  هي المستقيم  $(ST)$

$(E) : C$  هي الدائرة ذات المركز  $\Omega$  ذات اللاحقة  $3-4i$  ونصف القطر 3.

$(E) : D$  هي الدائرة ذات المركز  $S$  ونصف القطر 5.

(3) نعتبر السداسي المنتظم  $ABCDEF$  حيث أن طول ضلعه 1.

الجداء السلمي  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CF}$  يساوي :

$$\sqrt{3} : A, \quad -3 : B, \quad -\sqrt{3} : C, \quad \frac{3}{2} : D$$

(4)  $g$  دالة معرفة على المجال  $]-\infty, 0]$  بـ  $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$  وليكن  $(\Gamma)$  منحناها البياني

في المستوي .

$(\Gamma) : A$  يقبل مستقيما مقاربا معادلته  $y = -1$

$(\Gamma) : B$  لا يقبل مستقيما مقاربة

$(\Gamma) : C$  يقبل مستقيما مقاربا معادلته  $y = x$

$(\Gamma) : D$  يقبل مستقيما مقاربا معادلته  $y = 1$

(5) لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

الدالة  $f'$  هي المشتق الثاني للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  معرفة بـ :

$$f'(x) = \int_0^x -2te^{-t^2} dt : A$$

$$f'(x) = \int_0^x -2xe^{-x^2} dx : B$$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} : C$$

$$f'(x) = e^{-x^2} : D$$

✓ الحل :

$$(1) \text{ لدينا } Z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ إذن } Z^{14} = (\sqrt{2})^{14} e^{i\frac{14\pi}{3}}$$

$$\text{الجواب } C \quad Z^{14} = 2^7 e^{i\frac{14\pi}{3}} = 128 \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -64 + 64i\sqrt{3}$$

$$(2) \text{ يكافئ } |Z-3| = |3-4i| = 5 \quad SM=3$$

ومنه نستنتج أن  $M$  تنتمي إلى الدائرة ذات المركز  $S$  وطول نصف القطر 3. نختار الجواب  $D$ .

(3) باستعمال نظرية الكاشي يكون طول الضلع  $[AC]$  هو :

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cos 120} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$ACF$  مثلث قائم في  $A$  إذن  $CF=2$

$$\vec{AC} \cdot \vec{CF} = -\vec{CA} \cdot \vec{CF} = -CA \times CF \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3$$

وبالتالي نختار الجواب  $B$ .

(4) يمكن كتابة  $g(x)$  بالشكل التالي :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}}{x-3} = \frac{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x-3} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1 - \frac{3}{x}}$$

لأنه من أجل  $x \leq 0$  يكون  $x^2 = |x| = -x$

نهاية المقام هي 1 ونهاية البسط هي -1 بجوار  $(-\infty)$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$  نختار

الجواب  $A$

$$(5) \text{ لدينا بالتعريف } f'(x) = e^{-x^2}$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى  $x$  نجد  $f''(x) = -2e^{-x^2}$  نختار الجواب  $C$

### التمرين الثاني : (خاص بشعبة الرياضيات والتقني رياضي)

لكل سؤال أربعة أجوبة واحد منها صحيح.

على الترشح أن يضع رقم السؤال والحرف الموافق للجواب المختار (لا تترك الأجابة).

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة  $x^2 - x + 4 = 0 \pmod{6}$

A : كل الحلول هي أعداد زوجية.

B : لا يوجد أي حل.

C : الحلول تحقق  $x \equiv 2 \pmod{6}$

D : الحلول تحقق  $x \equiv 2 \pmod{6}$  أو  $x \equiv 5 \pmod{6}$

(2) نريد حل المعادلة  $24x + 34y = 2 \pmod{24}$  ..... (E)

حيث  $x$  و  $y$  أعداد صحيحة .

A : حلول المعادلة (E) كلها من الشكل :

$$(x, y) = (34k - 7, 5 - 24k) , k \in \mathbb{Z}$$

B : المعادلة (E) ليس لها حلول.

C : حلول المعادلة (E) من الشكل  $(x, y) = (17k - 7, 5 - 12k) , k \in \mathbb{Z}$

D : حلول المعادلة (E) من الشكل  $(x, y) = (-7k, 5k) , k \in \mathbb{Z}$

(3) نعتبر العددين  $n = 1789$  و  $p = 1789^{2003}$  لدينا إذن :

A :  $n \equiv 4 \pmod{17}$  و  $p \equiv 0 \pmod{17}$

B :  $p$  عدد أولي

C :  $p \equiv 4 \pmod{17}$

D :  $p \equiv 1 \pmod{17}$

(4) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، نعتبر النقطتين A و B ذات

اللاحقتين  $a$  ،  $b$  على الترتيب.

الثلث MAB قائم ومتساوي الساقين مباشر وتره هو القطعة  $[AB]$  إذا وفقط إذا كانت

النقطة M ذات اللاحقة Z بحيث :

$$Z = \frac{b - ia}{1 - i} : A$$

$$Z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a) : B$$

$$a - Z = i(b - Z) : C$$

$$b - Z = \frac{\pi}{2}(a - Z) : D$$

(5) نعتبر في المستوي الموجه النقطتين A و B ونرمز بـ I إلى منتصف  $[AB]$  ، وليكن

f التشابه المباشر مركزه A ونسبته 2 وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$

و ليكن g تشابه مركزه A ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$

وليكن h التناظر المركزي ذو المركز I .

A :  $hogof$  يحول A إلى B وهو دوران

B :  $hogof$  هو تناظر محوري محوره هو محور القطعة  $[AB]$

C :  $hogof$  ليس تشابهاً.

D :  $hogof$  هو إنسحاب شعاعه  $\overrightarrow{AB}$ .



✓ الحل :

- (1) الجواب D .
- (2) الجواب C .
- (3) الجواب C .
- (4) الجواب A .
- (5) الجواب D .

التمرين الثالث :

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- (1) نعتبر المستوي  $(p)$  المار بالنقطة  $B(1, -2, 1)$  وشعاعه الناظم  $\vec{n}(-2, 1, 5)$  والمستوي  $(R)$  ذو المعادلة  $x + 2y - 7 = 0$ 
  - (أ) برهن أن المستويين  $(p)$  و  $(R)$  متعامدان
  - (ب) برهن أن تقاطع المستويين  $(p)$  و  $(R)$  هو المستقيم  $(\Delta)$  المار من  $C(-1, 4, -1)$  وشعاع توجيهه هو  $\vec{u}(2, -1, 1)$
  - (ج) لتكن النقطة  $A(5, -2, -1)$  احسب المسافة بين  $A$  و  $(p)$  ثم المسافة بين  $A$  و  $(R)$
  - (د) عين المسافة بين  $A$  و  $(\Delta)$
- (2) ليكن من أجل كل عدد حقيقي  $t$  النقطة  $M_t$  ذات الإحداثيات  $(1+2t, 3-t, t)$ 
  - (أ) عين بدلالة  $t$  الطول  $AM$  والذي نسميه بـ  $Q(t)$  ونعرف عندئذ دالة  $Q$  من  $\mathbb{R}$  في  $\mathbb{R}$ .
  - (ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $Q$  على  $\mathbb{R}$ . ثم حدد قيمتها الحدية الصغرى
  - (ج) فسر هندسيا القيمة الحدية الصغرى ؟

✓ الحل :

- (1- أ) شعاع الناظم لـ  $(R)$  هو  $\vec{r}(1, 2, 0)$  ولدينا  $\vec{r} \cdot \vec{n} = -2 + 2 + 0 = 0$  إذن المستويان  $(p)$  و  $(R)$  متعامدان.
- (ب) النقاط المشتركة بين هذين المستويين تحقق معادلتيهما ومنه نستنتج أن :
 
$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \dots\dots (1) \\ -2x + y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$$
 من (1) نجد  $x = -2y + 7$  نعوض  $x$  في (2) نجد  $y = -z + 3$  ومنه  $x = 2z + 1$ 
 بوضع  $Z = t$  نجد  $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases}$  وهذه الجملة هي التمثيل الوسيط للمستقيم  $(\Delta)$
- الذي شعاع توجيهه  $\vec{u}(2, -1, 1)$  ومن أجل  $t = -1$  نجد أن إحداثيات  $C$  تحقق الجملة وبالتالي  $C$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ .

$$d(A, (R)) = \frac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}} \quad \text{ج) لدينا}$$

$$d(A, (R)) = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d(A, (R)) = \frac{|5-4-7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \quad \text{بنفس الطريقة نجد}$$

د) في المستوي الذي يشمل النقطة  $A$  والعمودي على المستويين  $(p)$  و  $(R)$  نستطيع تطبيق نظرية فيثاغورث ولدينا ،

$$d(A, \Delta) = 3\sqrt{2} \quad \text{إذن} \quad d^2(A, \Delta) = d^2(A, (P)) + d^2(A, (R)) = \frac{270}{25} + \frac{180}{25} = \frac{450}{25}$$

$$AM_t^2 = (-4+2t)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2 = 6t^2 - 24t + 42 = 6(t^2 - 4t + 7) \quad (1-2)$$

ثلاثي الحدود  $t^2 - 4t + 7$  مميزه هو  $\Delta = -12$

وبالتالي لا ينعدم وعليه إشارته موجبة

$$t^2 - 4t + 7 = (t-2)^2 + 3 \quad \text{نستطيع كتابة} \quad AM_t = \sqrt{6(t^2 - 4t + 7)} = \delta(t) \quad \text{إذن}$$

ب) الدالة  $\delta$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$

$$\delta'(t) = \frac{12t-24}{2\sqrt{6(t^2-4t+7)}} = \frac{6(t-2)}{\sqrt{6(t^2-4t+7)}} \quad \text{ولدينا}$$

إشارة  $\delta'(t)$  من نفس إشارة  $(t-2)$

إذن الدالة  $\delta$  متزايدة على المجال  $[2, +\infty[$  ومتناقصة على المجال  $[0, 2]$

إذن لها قيمة حدية صغرى عند  $t=2$  والتي تساوي  $\delta(2) = 3\sqrt{2}$

ج) نعلم أن النقطة  $M_t$  من المستقيم  $(\Delta)$  . و من الأسئلة السابقة وجدنا أصغر مسافة

بين  $A$  و  $\Delta$  هي  $3\sqrt{2}$

إذن بينا بطريقة ثانية كيفية إيجاد المسافة بين  $A$  و  $\Delta$  .

## التمرين الرابع :

I - حجر نرد رباعي الوجوه منتظم يملك وجه أزرق (B) ووجهين حمراوين (R)

ووجه أخضر (V) ، نفرض أن هذا الحجر متزن.

لعبة تتمثل في القيام برمي هذا الحجر مرتين متواليتين ومستقلتين، وفي كل رمية نسجل لون الوجه المخفي

نعتبر الأحداث التالية :

E الحادث " في اللعبة الوجهان التحصل عليهما خضراوين "

F الحادث " في اللعبة الوجهان التحصل عليهما لهما نفس اللون "

1 - احسب احتمال الحادثين E و F واحتمال E علما أن F محقق.

2 - نقوم بـ 10 لعبات متماثلة ومستقلة فيما بينهما

احسب احتمال التحصل على الأقل مرتين على الحادث F خلال العشر لعبات.

( نعطي قيمة تقريبية عشرية بتقريب  $10^{-3}$  )



**II** - نريد معرفة إن كان الحجر المستعمل متزنا أم لا ، لذلك نرقم أوجهه من 1 إلى 4 ونقوم برمييه 160 مرة .

لتكن  $n_i$  عدد مرات ظهور الرقم  $i$  الموجود في الوجه الخفي فتحصلنا على النتائج التالية :

الوجه $i$	1	2	3	4
التكرار $n_i$	30	48	46	32

ليكن  $f_i$  التواتر النسبي و  $d^2$  هو العدد  $\sum_{i=1}^4 \left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$

نحاكي بعد ذلك 1000 مرة التجربة التي تتمثل في سحب رقم عشوائيا 160 مرة من المجموعة :  $\{1, 2, 3, 4\}$

ومن أجل كل محاكاة نسحب نعدد  $d^2 = \sum_{i=1}^4 \left(F_i - \frac{1}{4}\right)$  حيث  $F_i$  هو تواتر ظهور الرقم  $i$

العشري التاسع  $D$  لهذه السلسلة الإحصائية لـ 1000 قيمة لـ  $d^2$  يساوي إلى 0,0098 حسب التجربة وبمجازفة قدرها 10 % هل يمكننا اعتبار أن الحجر متزن ؟

✓ **الحل :**

**I - 1)** بإنشاء شجرة الاحتمالات نجد  $P(E) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

وبنفذ الطريقة نجد  $P(F) = P(V \cdot V) + P(R \cdot R) + P(B \cdot B) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

**2)** لدينا تجربة برنولي مع  $n = 10$  و  $P = \frac{3}{8}$

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6}$$

لنحسب احتمال التحصل على الحدث  $F$  أقل من مرتين ،

$$P(F \text{ حدث } 0 \text{ مرة}) + P(F \text{ حدث } 1 \text{ مرة}) = C_{10}^0 \left(\frac{3}{8}\right)^0 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10} + C_{10}^1 \left(\frac{3}{8}\right) \times \left(\frac{5}{8}\right)^9 = \frac{7 \times 5^{10}}{8^{10}}$$

احتمال الحصول على الأقل مرتين الحادث  $F$  هو  $1 - \frac{7 \times 5^{10}}{8^{10}}$  أي بالتقريب 0,936

**II** - بما أن مجموع التكرارات هو  $30 + 48 + 32 + 46$  ويختلف عن 160 فإن الجدول غير صحيح.



## (فرنسا - 2006)

### التمرين الأول :

ليكن  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلما متعامدا متجانسا للفضاء، نعتبر النقط ،  
 $E(3, 2, -1)$  ،  $D(1, 0, -2)$  ،  $C(3, 1, -3)$  ،  $B(0, 4, -3)$  ،  $A(2, 4, 1)$   
 $I(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5})$

اجب بصحيح أو خطأ بدون تبرير لكل اقتراح من الاقتراحات التالية ،

- (1) معادلة المستوي  $(ABC)$  هي  $2x + 2y - z - 11 = 0$
- (2) النقطة  $E$  هي السقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$
- (3) المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان

(4) المستقيم  $(CD)$  معرف بتمثيله الوسيطى  

$$(CD) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

(5) النقطة  $I$  تنتمي إلى المستقيم  $(AB)$

### ✓ الحل :

- (1) إحداثيات النقط  $A, B, C$  تحقق المعادلة  $2x + 2y - z - 11 = 0$   
 هذه النقط ليست على استقامة واحدة إذن نعرف عندئذ مستوي  
 المعادلة  $2x + 2y - z - 11 = 0$  هي معادلة لمستوي .  
 إذن معادلة المستوي  $(ABC)$  هي  $2x + 2y - z - 11 = 0$
- (2) النقطة  $E$  هي السقط للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$  إذا وفقط إذا كان المستقيم  
 $(DE)$  عمودي على المستوي  $(ABC)$  و  $E \in (ABC)$  فالشعاع  $\vec{n}(2, 2, -1)$  هو شعاع  
 ناظم للمستوي  $(ABC)$

لدينا  $E \in (ABC)$  لكن الشعاعين  $\vec{DE}$  و  $\vec{n}$  غير مرتبطين خطيا  
 ومنه نستنتج أن المستقيم  $(DE)$  غير عمودي على المستوي  $(ABC)$   
 إذن النقطة  $E$  ليست السقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$  .

(3) لدينا  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$  إذن  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان

(4) النقطة  $D$  إحداثياتها  $(1, 0, -2)$

لكي تكون الجملة  $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \end{cases}$  تمثيلا وسيطيا لـ  $(CD)$  يجب على الأقل أن يوجد  $t$  حيث

$$\begin{cases} 1 = -1+2t \\ 0 = -1+t \\ -2 = 1-t \end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نتحقق أنه لا توجد أي قيمة لـ  $t$  تحقق الجملة الأخيرة. نستنتج أن المعادلة الوسطية السابقة ليست المعادلة الوسطية لـ  $(CD)$

5) للبين الارتباط الخطي لـ  $\overrightarrow{AI}$  و  $\overrightarrow{AB}$  مما يعني أن  $I \in (AB)$

1- صحيح

2- خطأ

3- صحيح

4- خطأ

5- صحيح

## التمرين الثاني :

1) لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 e^{1-x}$

و (C) تمثيلها البياني في العلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الرسم هي 2Cm

أ) عيّن نهايات الدالة  $f$  عند  $(-\infty)$  و  $(+\infty)$  ماذا تستنتج بالنسبة إلى  $S(C)$

ب) بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  محدد دالتها المشتقة  $f'$ .

ج) شكل جدول تغيرات  $f$  ثم ارسم بيانها (C).

2) ليكن  $n$  عدد طبيعي غير معدوم.

لنعتبر التكامل  $I_n$  العرف بـ

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

أ) أوجد علاقة بين  $I_n$  و  $I_{n+1}$

ب) احسب  $I_1$  ثم  $I_2$

ج) اعط تفسيرا هندسيا للعدد  $I_2$  (أظهره

على بيان السؤال 1- ج)).

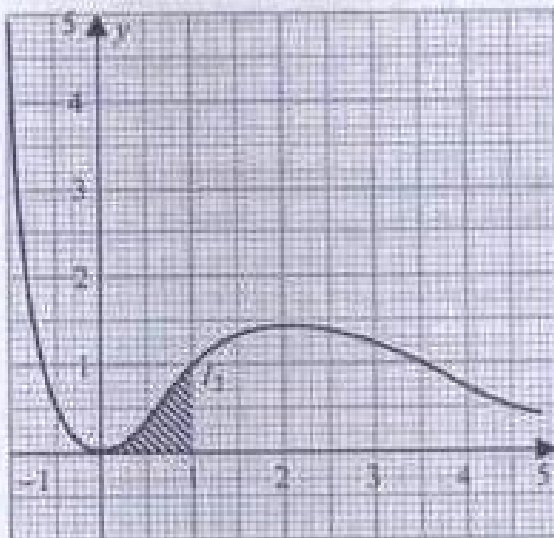
3- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي

$x$  من  $[0, 1]$

ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$

لدينا للتباينة  $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$

ب) استنتج حصرا لـ  $I_n$  ثم حدد نهاية لـ  $I_n$  لما  $n$  تؤول إلى  $(+\infty)$ .



✓ الحل :

1- ا)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} \times e = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \times e = 0$

نستنتج أن محور الفواصل مقارب للبيان (C) للدالة  $f$  عند  $+\infty$

(ب)  $f$  هي جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

إذن فهي قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة هي  $f'(x) = e^{1-x}(-x^2 + 2x)$

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$-x(x-2)$	-	○	+	-
$f'(x)$	-	○	+	-
$f$	$+\infty$	0	$\frac{4}{2}$	0

(ج) من أجل كل

عدد حقيقي  $x$

لدينا  $2^{1-x} > 0$

إذن إشارة  $f'(x)$

هي إشارة

$(-x^2 + 2x)$

و  $-x^2 + 2x = -x(x-2)$

إذن الدالة  $f$  متناقصة على كل من المجالين  $]-\infty, 0]$  و  $[2, +\infty[$  ومتزايدة على

المجال  $[0, 2]$

(2) لدينا  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

(1) لدينا  $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$

بوضع  $u(x) = x^{n+1}$  يكون  $u'(x) = (n+1)x^n$

ومنه  $v(x) = -e^{1-x}$  و  $v'(x) = e^{1-x}$

إذن  $I_{n+1} = \int_0^1 u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx$

$= [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x} dx$

وعليه  $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

(ب) لحساب  $I_1$  نستعمل التكامل بالتجزئة :

$I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx = [-x e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = [(-x-1)e^{1-x}]_0^1 e - 2$

حسب السؤال السابق  $I_2 = -1 + 2I_1 = 2e - 5$

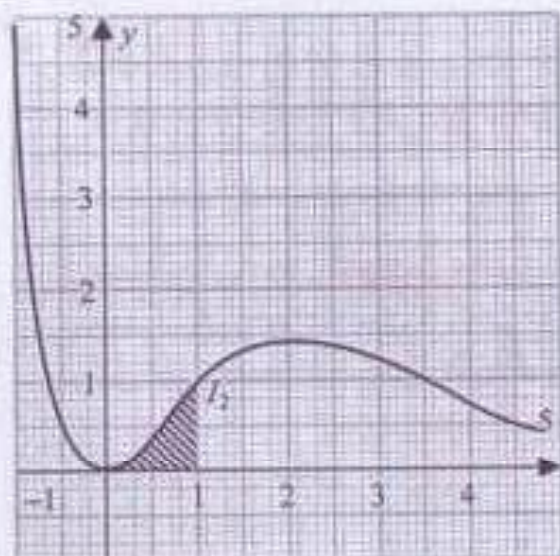
(ج)  $I_2$  تمثل المساحة المحددة بالبيان (C) والمستقيمين  $x=0$  و  $x=1$  ومحور الفواصل

(1-3) من أجل كل  $x \in [0, 1]$  لدينا  $0 \leq 1-x \leq 1$

وبما أن الدالة  $(x \mapsto e^x)$  متزايدة على  $\mathbb{R}$

يكون لدينا  $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$  وعليه  $1 \leq e^{1-x} \leq e$





وبما أنه من أجل كل  $x$  من  $[0, 1]$  لدينا  
 $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$  فإن  $x^n \geq 0$

(ب) نستنتج عندئذ أن

$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ لكن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \text{ وحسب نظرية الحصر}$$

### التمرين الثالث :

#### I - أسئلة الدرس

- (1) اعط نصي مرهنة "بيزو" ومرهنة "غوص"
- (2) برهن مرهنة "غوص" باستعمال مرهنة "بيزو"

#### II - الهدف هو حل في $\mathbb{Z}$ الجملة (S) $\begin{cases} n \equiv 13 [19] \\ n \equiv 6 [12] \end{cases}$

- (1) بين أنه توجد ثنائية  $(u, v)$  من الأعداد الصحيحة بحيث  $19u + 12v = 1$  (ليس مطلوب في هذا السؤال اعطاء الثنائية)
- تحقق أنه من أجل هذه الثنائية يكون العدد  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  حلا للجملة (S)
- (2- أ) ليكن  $n_0$  حلا للجملة (S)

$$\text{تحقق أن الجملة (S) تكافئ } \begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$$

$$\text{(ب) بين أن الجملة } \begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases} \text{ تكافئ } n \equiv n_0 [12 \times 19]$$

- (3- أ) أوجد ثنائية  $(u, v)$  حلا للمعادلة  $19u + 12v = 1$  ثم احسب القيمة الموافقة لـ  $N$
- (ب) عيّن مجموعة حلول الجملة (S) (استعمل السؤال 2 - ب)
- (4)  $n$  عدد طبيعي حيث باقي قسمته على 12 هو 6 وباقي قسمته على 19 هو 13  
 نقسم  $n$  على  $228 = 12 \times 19$  ما هو باقي القسمة  $r$  لهذه القسمة ؟

✓ الحل :

#### I - 1) مرهنة بيزو ، ليكن $a$ و $b$ عدنان صحيحان.

$a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث  
 $au + bv = 1$



مبرهنة غاوس : لتكن  $a, b, c$  ثلاثة أعداد صحيحة.

إذا قسم  $a$  العدد  $bc$  وإذا كان  $a$  و  $b$  أوليين فيما بينهما فإن  $a$  يقسم  $c$   
(2) إذا كان  $a$  و  $b$  أوليين فيما بينهما فإنه يوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث

$$au + bv = c$$
 بضرب طرفي هذه المعادلة في  $c$  تصبح

إذا كان  $a$  يقسم  $bc$  فإنه يوجد عدد صحيح  $k$  بحيث  $bc = ka$  بحيث

$$acu + kav = c$$
 وعليه  $a(cu + kv) = c$  إذن  $a$  يقسم  $c$

**II - 1)** العدنان 19 و 12 أوليان فيما بينهما إذن حسب نظرية بيزو يوجد عدنان

$$19u + 12v = 1$$
 صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث

$$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$$

$$19u + 12v = 1$$
 فإن  $19u = 1[12]$  و  $12v = 1[19]$

$$N = 13 \times 12v[19]$$
 وعليه  $N = 13[19]$

$$N = 6 \times 19u[12]$$
 وعليه  $N = 6[12]$  مما يثبت أن  $N$  حل للجملة (S)

2- أ)  $n_0$  حل للجملة (S) هذا يعني أن  $n_0 = 13[19]$  و  $n_0 = 6[12]$

إذن  $n$  حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان  $n = n_0[19]$  و  $n = n_0[12]$

ب)  $n = n_0[19]$  يعني أن  $(n - n_0)$  يقبل القسمة على 19

$n = n_0[12]$  يعني أن  $(n - n_0)$  يقبل القسمة على 12

إذن الجملة تكافئ أن  $(n - n_0)$  يقبل القسمة على 19 و على 12

لكن 19 و 12 أوليان فيما بينهما إذن  $(n - n_0)$  يقبل القسمة على 19 وعلى 12

وهذا يكافئ أن  $(n - n_0)$  يقبل القسمة على  $12 \times 19$  وعليه  $n = n_0[12 \times 19]$

3- أ) لتعيين ثنائية حل لـ  $19u + 12v = 1$  نستعمل خوارزمية إقليدس

$$1 = -5 \times 19 + 8 \times 12$$

وبالتالي  $(-5, 8)$  حل للمعادلة

$$19u + 12v = 1$$

يمكننا استعمال الموافقات بحيث أنه إذا

كان  $(u, v)$  حلا فإن  $19u = 1[12]$  لكن  $19u = 7u[12]$  و  $7 \times 7 = 1[12]$

وعليه نتحصل على حل آخر هو  $(7, -11)$

من أجل الثنائية  $(-5, 8)$  قيمة  $N$  الموافقة هي 678

من أجل الثنائية  $(7, -11)$  قيمة  $N$  الموافقة هي -918

ب) حسب نتيجة السؤال 2- ب) نستطيع القول أن  $n$  حل للجملة (S)

إذا وفقط إذا كان  $n = 678[12 \times 19]$  أو  $n = -918[12 \times 19]$

أي أن  $n$  من الشكل  $228k + 678$  أو  $228k - 918$  مع  $k$  عدد صحيح كفي

وبما أن  $678 = 222[228]$  و  $-918 = 222[-918]$

ويمكننا القول أن  $n$  حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان  $n = 228k + 222$  مع  $k$  عدد

صحيح كفي .

4) العدد  $n$  يحقق هذه الشروط إذا وفقط إذا كان  $n = 13[19]$  و  $n = 6[12]$

أي إذا وفقط إذا كان  $n$  حلا للجملة (S)

2	1	1	1	النتاج
2	5	7	12	19
1	2	5	7	البواقي

وبالتالي  $n = 228k + 222$  مع  $k \in \mathbb{Z}$   
 بما أن  $222 \in \{0, 1, 2, \dots, 227\}$  فإن الكتابة  $n = 228k + 222$  هي القسمة الإقليدية لـ  $n$  على 228 إذن باقي قسمة  $n$  على 228 هي 222.

### التمرين الرابع :

في باحة رماية يقومرامي بإجراء رميات متتالية لاستهداف كرة قصد فرقتها  
 احتمال فرقة الكرة هو 0.2 لكل رمية. الرامي يكف عن الرماية عند فرقة الكرة.  
 الرميات المتتالية مستقلة فيما بينها.

- 1- (أ) ما هو احتمال أن تبقى الكرة سليمة بعد رميتين ؟  
 (ب) ما هو احتمال أن رميتين تكفيان لفرقة الكرة ؟  
 (ج) ما هو الاحتمال  $p_n$  لكي تكفي  $n$  رمية لفرقة الكرة ؟  
 (د) من أجل أي قيمة لـ  $n$  يكون لدينا  $p_n > 0.99$

2) هذا الرامي يشارك في اللعبة التالية :

في أول الأمر يرمي نرد رباعي الوجوه منتظم أوجهه مرقعة من 1 إلى 4  
 (نهتم بالوجه الخبا غير الظاهر).

ليكن  $k$  رقم الوجه المتحصل عليه، يتوجه بعدها الرامي إلى باحة الرماية أين له الحق في  
 « رمية لفرقة الكرة ».

بين أنه إذا كان حجر النرد متزنا فإن احتمال فرقة الكرة يساوي إلى 0.4096  
 (نستطيع استعمال شجرة الاحتمالات).

3) يقوم الرامي بتجريب حجر النرد الرباعي الوجوه قصد معرفة إن كان متزنا أم لا  
 لذلك يقوم هذا الرامي برمي هذا الحجر 200 مرة ويتحصل على الجدول التالي :

الوجه $k$	1	2	3	4
عدد مخرج الوجه $k$	58	49	52	41

أ) احسب تواتر المخرج  $f_k$  الملاحظ من أجل كل وجه.

ب) نضع  $d^2 = \sum_{k=1}^4 (f_k - \frac{1}{4})^2$  احسب  $d^2$

ج) نقوم الآن بـ 1000 محاكاة لـ 200 رمية لحجر نرد رباعي الوجوه، ونحسب لكل محاكاة العدد  $d^2$ .

تحصلنا على السلسلة الإحصائية لـ 1000 قيمة لـ  $d^2$  فالنتائج مدونة في الجدول التالي :

القيمة العظمى max	$D_n$	$\bar{D}$	الوسيط $M$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	القيمة الدنيا min
0,01015	0,00452	0,00345	0,00235	0,00192	0,00192	0,00124

بمجازفة 10 % هل نستطيع اعتبار هذا الحجر مخدوع (غير متزن) ؟



✓ الحل :

لدينا احتمال فرقة الكرة عند رمية هو 0,2

إذن احتمال عدم فرقتها عند رمية هو 0,8

الرميات المتتالية مستقلة فيما بينها.

(1) لنسمي  $C_k$  الحادث " الكرة تفرقع في الرمية رقم  $k$  "

الحادث العكسي لـ  $C_k$  نرمز له بـ  $\bar{C}_k$  وحسب الفرض فإن الحادثين  $C_k$  و  $C_m$  مستقلان إذا كان  $k \neq m$

(أ) الحادث " الكرة تبقى سليمة بعد رميتين " هو  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$  بما أن  $C_1$  و  $C_2$  مستقلان فإن ،

$$P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = P(\bar{C}_1) \times P(\bar{C}_2) = 0,8 \times 0,8 = 0,64$$

إذن احتمال أن تبقى الكرة سليمة بعد رميتين هو 0,64

(ب) نريد حساب احتمال الحادث " تكفي رميتين لفرقة الكرة "

الذي حادثه العكسي هو " الكرة غير مفرقة بعد رميتين "

احتمال الحادث " تكفي رميتين لفرقة الكرة " هو  $0,34 = 1 - 0,64$

(ج) بنفس طريقة السؤال السابق لدينا ،

الحادث "  $n$  رمية تكفي لفرقة الكرة " هو الحادث العكسي للحادث " الكرة لم تفرقع بعد  $n$  رمية "

لكن الحادث " الكرة لم تفرقع بعد  $n$  رمية " هو  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 \cap \dots \cap \bar{C}_n$

هذه الحوادث مستقلة فيما بينها مثنى مثنى واحتمال كل منها هو 0,8

$$P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \bar{C}_3 \cap \dots \cap \bar{C}_n) = (0,8)^n$$

وعليه احتمال الحادث "  $n$  رمية تكفي لفرقة الكرة " هو  $1 - (0,8)^n$  أي

$$P_n = 1 - (0,8)^n$$

(د) نبحث عن العدد  $n$  بحيث  $P_n > 0,99$  أي  $1 - (0,8)^n > 0,99$

وبالتالي  $(0,8)^n < 0,01$

باستعمال الدالة اللوغاريتمية النيرية  $\ln$  المتزايدة على المجال  $]0, +\infty[$

$$n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad \text{ومنه } n \geq 21$$

(2) لنستعمل الحادث العكسي والاحتمالات الشرطية

الاحتمال  $P_k$  للحادث " التحصل على الوجه  $k$  " مع  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  عند رمي حجر

النرد هو  $P_k = \frac{1}{4}$  إذن احتمال عدم فرقة الكرة علما أننا حصلنا على الوجه  $k$  هو

$$\frac{1}{4} \times (0,8)^k$$

إذن حسب قانون الاحتمالات الكلية فإن احتمال عدم فرقة الكرة هو :

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{4} \times (0,8)^k = \frac{1}{4} \times 0,8 \times \frac{1 - (0,8)^4}{1 - (0,8)} = 0,5904$$

وعليه احتمال فرقة الكرة هو  $1 - 0,5904 = 0,4096$

(3- أ) نحسب التواترات :

الوجه $k$	1	2	3	4
عدد مخارج للوجه $k$	58	49	52	41
الترددات $f_k$	0,29	0,245	0,260	0,205

$$d^2 = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{1}{4} - f_k \right)^2 \quad (\text{ب})$$

$$d^2 = (0,29 - 0,25)^2 + (0,245 - 0,25)^2 + (0,26 - 0,25)^2 + (0,205 - 0,25)^2$$

$$d^2 = 0,00375$$

ج) نلاحظ ان  $d^2 < D_0$  إذن قيمة  $d^2$  مثالية بـ 90 % مع نتائج محاكاة حول حجر نرد متزن

إذن بمحاكاة قدرها 10 % نستطيع اعتبار حجر النرد غير متزن.