

<b>RÉPUBLIQUE TUNISIENNE</b>  <b>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION</b>	<b>EXAMEN DU BACCALAURÉAT</b> <b>SESSION 2021</b>	<b>Session de contrôle</b>
	Épreuve : <b>Mathématiques</b>	Section : <b>Sciences expérimentales</b>
	Durée : <b>3h</b>	Coefficient de l'épreuve: <b>3</b>

N° d'inscription

--	--	--	--	--	--

\* \* \* \* \*

**Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.**

**La page 4/4 est à rendre avec la copie.**

### Exercice 1 (4 points)

*Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.*

*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

✚ Dans une population,  
la probabilité qu'une personne soit diabétique est égale à 0,15 ,  
la probabilité qu'une personne soit atteinte par une hépatite est égale à 0,05 ,  
la probabilité qu'une personne soit atteinte par les deux maladies à la fois est égale à 0,03.

*On choisit au hasard une personne de cette population.*

- La probabilité que la personne choisie soit atteinte par une hépatite ou qu'elle soit diabétique est égale à
  - 0,2
  - 0,17
  - 0,23
- La probabilité que la personne choisie soit atteinte par une hépatite sachant qu'elle est diabétique est égale à
  - 0,6
  - 0,05
  - 0,2

✚ On lance trois fois de suite un dé cubique équilibré à 6 faces, dont deux faces portent la lettre " A ", trois faces portent la lettre " B " et une face porte la lettre " C ".

- La probabilité d'obtenir les lettres B, A et C dans cet ordre est égale à

- $\frac{1}{36}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{12}$

- La probabilité d'obtenir au moins une fois la lettre A est égale à

- $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
- $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3$
- $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$





## Exercice 2 (5 points)

On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 - 2iz + (-3 + 2i\sqrt{3}) = 0$ .

1. a) Vérifier que  $\sqrt{3}$  est une solution de l'équation (E).  
b) Déterminer alors l'autre solution de (E).
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par A, B, C, D et I les points d'affixes respectives  $z_A = \sqrt{3} + 2i$ ,  $z_B = -\sqrt{3} + 2i$ ,  $z_C = -\sqrt{3}$ ,  $z_D = \sqrt{3}$  et  $z_I = i$ .  
a) Montrer que  $AC = BD$ .  
b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
3. a) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre I et de rayon 2.  
b) Construire alors les quatre points A, B, C et D.  
c) Calculer l'aire du rectangle ABCD.

## Exercice 3 (7 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$ .

On désigne par  $(\zeta)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

A) 1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Montrer que pour tout  $x \in ] -1, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Montrer que la fonction  $f$  réalise une bijection de  $] -1, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

B) Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

1. On donne ci-dessous le tableau de variation de  $g$ .

$x$	$-1$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$+\infty$
$g$	$-\infty$	$g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	$-\infty$





a) Calculer  $g(0)$  et en déduire que  $g(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) > 0$ .

b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $] -1, +\infty[$  exactement deux solutions 0 et  $\alpha$ .

c) Vérifier que  $1,5 < \alpha < 1,6$ .

d) Etudier la position relative de la courbe  $(\zeta)$  et de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

2. Dans l'annexe ci-jointe le plan est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et on a placé le réel  $\alpha$  sur l'axe des abscisses.

a) Tracer la droite  $\Delta$  et la courbe  $(\zeta)$  dans l'annexe.

b) On note  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$  sur  $] -1, +\infty[$ .

Tracer la courbe  $(\zeta')$  de la fonction  $f^{-1}$  dans le même repère.

3. Soit  $\mathcal{A}(\alpha)$  l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $(\zeta)$ ,  $(\zeta')$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \alpha$ .

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que  $\mathcal{A}(\alpha) = 2\alpha \ln(\alpha+1) - \alpha^2$ .

#### Exercice 4 (4 points)

Soit  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $[1, +\infty[$  par

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

1. Soit les fonctions  $G$  et  $H$  définies sur  $[1, +\infty[$  par

$$G(x) = \sqrt{x^2-2x+2} \quad \text{et} \quad H(x) = \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}).$$

Montrer que  $G$  et  $H$  sont des primitives respectives de  $g$  et  $h$  sur  $[1, +\infty[$ .

2. Soit  $I$  l'intégrale définie par  $I = \int_1^2 h(x) dx$ . Montrer que  $I = \ln(1+\sqrt{2})$ .

3. Soit les intégrales  $J = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$  et  $K = \int_1^2 G(x) dx$ .

a) Montrer que  $I + J = K$ .

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que  $J = \sqrt{2} - K$ .

c) En déduire la valeur de l'intégrale  $J$ .







Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

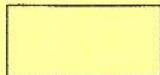
Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales**  
**Session de contrôle (2021)**  
**Annexe à rendre avec la copie**



**MATHÉMATIQUES**  
**Section : Sciences Expérimentales**  
**Session de contrôle 2021**

**Exercice 1 :**

1) Soient les évènements :

D : « La personne est diabétique » et H : « La personne est atteinte par une hépatite »

On sait que :  $p(D) = 0,15$  ;  $p(H) = 0,05$  et que  $p(D \cap H) = 0,03$ .

$$p(D \cup H) = p(D) + p(H) - p(D \cap H) = 0,17.$$

La réponse **b)** est correcte.

$$2) p(H/D) = \frac{p(D \cap H)}{p(D)} = \frac{0,03}{0,15} = 0,2.$$

La réponse **c)** est correcte.

$$3) p(B, A, C) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

La réponse **a)** est correcte.

$$4) p(A \geq 1) = 1 - p(A = 0) = 1 - C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

La réponse **c)** est correcte.

**Exercice 2 :**

$$1) a) \sqrt{3}^2 - 2i\sqrt{3} + (-3 + 2i\sqrt{3}) = 3 - 2i\sqrt{3} - 3 + 2i\sqrt{3} = 0 \text{ donc } \sqrt{3} \text{ est solution de (E).}$$

b) La deuxième racine  $z_2$  doit satisfaire l'égalité  $z_2 + \sqrt{3} = 2i$  donc  $z_2 = -\sqrt{3} + 2i$

$$2) a) AC = |z_C - z_A| = |-\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2i| = |-2\sqrt{3} - 2i| = 4.$$

$$BD = |z_D - z_B| = |\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2i| = |2\sqrt{3} - 2i| = 4 \text{ donc } AC = BD = 4.$$

$$b) \overline{Z_{AB}} = Z_B - Z_A = -\sqrt{3} + 2i - \sqrt{3} - 2i = -2\sqrt{3} = \overline{Z_{DC}}.$$

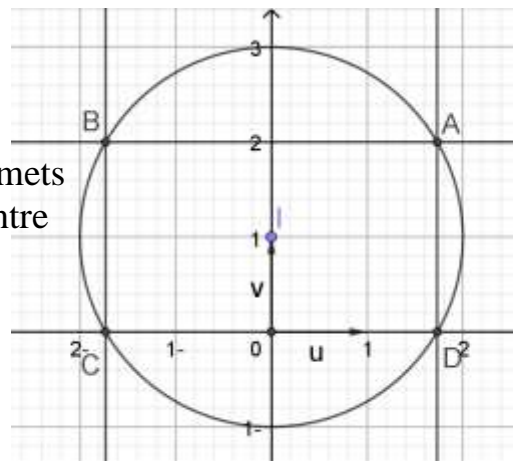
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme car  $\overline{AB} = \overline{DC}$  et ses diagonales sont isométriques donc c'est un rectangle.

$$3) a) \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2i}{2} = z_I \text{ donc I est le}$$

centre du rectangle ABCD et comme ses diagonales ont pour longueur 4 alors ses sommets A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Le point I et de rayon 2.

b)

$$c) \mathcal{A}_{ABCD} = AB \times AD = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3} \text{ u.a}$$



**Exercice 3 :**

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \text{ pour tout } x \in ]-1, +\infty[.$$

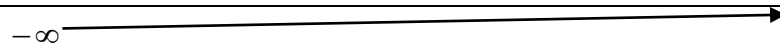
A) 1. a)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  donc la droite d'équation  $x = -1$  est une asymptote verticale à la courbe ( $\zeta$ )

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} + \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\rightarrow 1} = 0 \text{ donc la}$$

courbe ( $\zeta$ ) admet au voisinage de plus l'infini une branche parabolique de direction celle de la droite des abscisses.

$$2. a) f'(x) = \frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

b) Pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$  on a :  $f'(x) > 0$ .

x	-1	+	$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$		$+\infty$

c)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]-1, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $]-1, +\infty[$  sur  $f(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}$ .

B) 1. a)  $g(x) = f(x) - x$ , pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ .

$g$  est strictement croissante sur  $\left]-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$  et  $-1 < 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  donc

$$g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) > g(0) = 0.$$

b) Les équations  $f(x) = x$  et  $g(x) = 0$  sont équivalentes sur  $]-1, +\infty[$ .

La restriction de  $g$  à l'intervalle  $\left]-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$  est continue et strictement

croissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image et comme  $g(0) = 0$  alors la seule solution de l'équation  $g(x) = 0$  ou encore  $f(x) = x$  est 0.

La restriction de  $g$  à l'intervalle  $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right[$  est continue et strictement



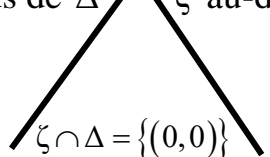
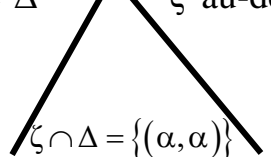
décroissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image

$\left] -\infty, g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]$  et comme  $0 \in \left] -\infty, g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]$  alors l'équation  $g(x) = 0$  ou encore  $f(x) = x$  admet dans  $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right[$  une solution unique  $\alpha$ .

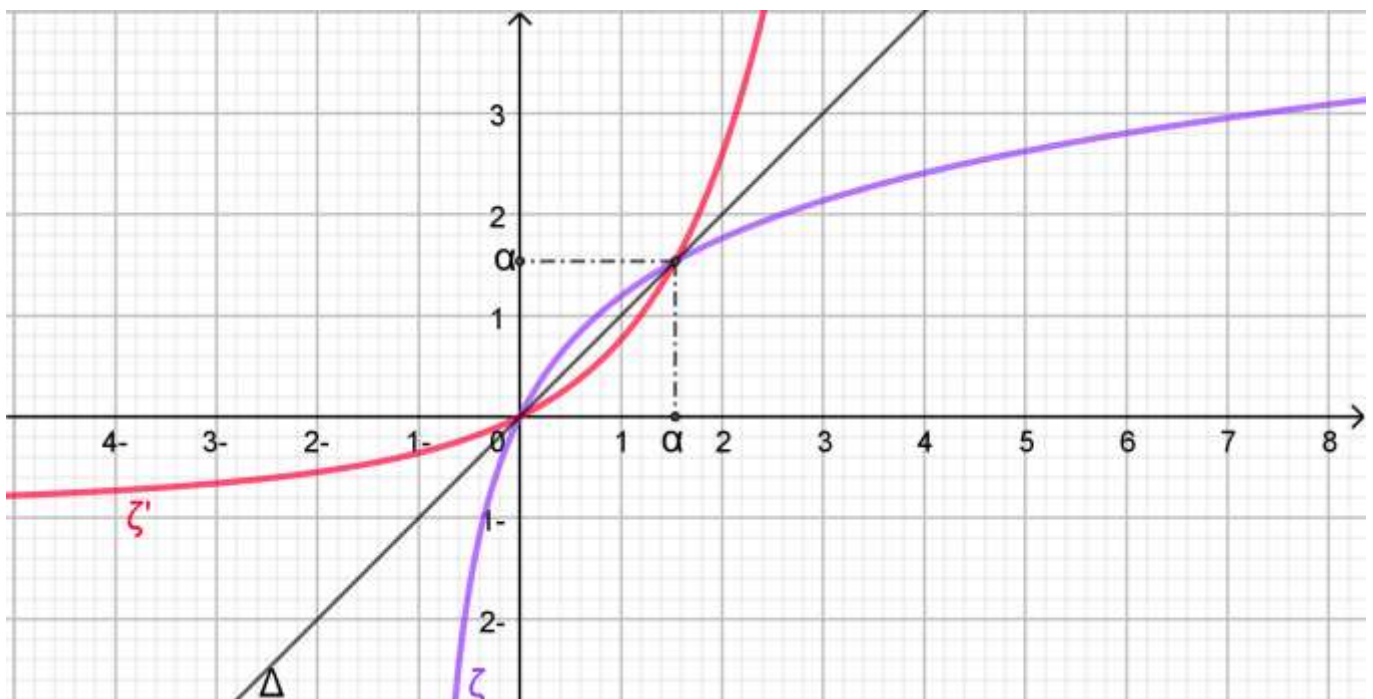
**Conclusion :** L'équation  $f(x) = x$  admet dans  $] -1, +\infty[$  deux solutions 0 et  $\alpha$ .

c) Comme  $g(1,5) \approx 0,02 > 0$  et  $g(1,6) \approx -0,03 < 0$  alors  $1,5 < \alpha < 1,6$

d)

x	-1	0	$\alpha$	$+\infty$
$f(x) - x$				
Position	$\zeta$ au-dessous de $\Delta$	$\zeta$ au-dessus de $\Delta$	$\zeta$ au-dessous de $\Delta$	
				
		$\zeta \cap \Delta = \{(0,0)\}$	$\zeta \cap \Delta = \{(\alpha, \alpha)\}$	

2. a) et b)



3) Pour des raisons de symétrie,

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx = 2 \int_0^\alpha \left( 1 - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - x \right) dx = 2 \left[ \frac{-x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right]_0^\alpha + 2J$$

$$\text{avec } J = \int_0^\alpha \ln(x+1) dx$$

$$\text{On pose } U(x) = \ln(x+1) \rightarrow U'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$V'(x) = 1 \rightarrow V(x) = x$$

$$J = \left[ x \ln(x+1) \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{x}{x+1} dx = \alpha \ln(\alpha+1) - \int_0^\alpha 1 - \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \alpha \ln(\alpha+1) - \left[ x - \ln(x+1) \right]_0^\alpha = (1+\alpha) \ln(\alpha+1) - \alpha$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = -\alpha^2 + 2\alpha - 2\ln(\alpha+1) + 2(1+\alpha) \ln(\alpha+1) - 2\alpha$$

$$= -\alpha^2 - 2\ln(\alpha+1) + 2(1+\alpha) \ln(\alpha+1) = 2\alpha \ln(\alpha+1) - \alpha^2$$

#### **Exercice 4 :**

$$1) \quad g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \text{ et } h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \cdot x \in ]1, +\infty[.$$

$$G(x) = \sqrt{x^2-2x+2} \text{ et } H(x) = \ln \left[ x-1 + \sqrt{x^2-2x+2} \right] \cdot x \in ]1, +\infty[.$$

$$\text{On a : } G'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = g(x) \text{ donc } G \text{ est une primitive de } g \text{ sur } [1, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } H'(x) &= \frac{1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}} \\ &= \frac{\frac{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = h(x) \end{aligned}$$

Par suite, H est une primitive de h sur  $[1, +\infty[$ .

$$2) \quad I = \int_1^2 h(x) dx = H(2) - H(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$3) \quad a) \quad J = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx \text{ et } K = \int_1^2 G(x) dx$$

$$\begin{aligned} I + J &= \int_1^2 \left( \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^2-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \int_1^2 \sqrt{x^2-2x+2} dx = K \end{aligned}$$



$$\text{b) } J = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx = \int_1^2 (x-1) \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$$

$$\text{On pose : } U(x) = x - 1 \rightarrow U'(x) = 1$$

$$V'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \rightarrow V(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$J = \left[ (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2} \right]_1^2 - \int_1^2 \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \sqrt{2} - K$$

$$\text{c) } J = \sqrt{2} - K = \sqrt{2} - I - J \text{ donc } J = \frac{\sqrt{2} - I}{2} = \frac{\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$$